COLLÈGE F-X. VOGT		Année scolaire 2021-2022
Département de Mathématiques	CONTROLE	Situation Scolaire N°3 Date : 17 Décembre 2021

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Niveau : **Tle D et TTI** Durée : **04 heures** Coef: 4

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES 15,5 POINTS

Exercice 1 : 05 Points

1- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $3^{2n}-1$ est un multiple de 8. *1pt*

2- Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 5 \end{cases}$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$. *1pt*

3- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, on a : $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. *0,75pt*

4- Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+2+..+k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$ avec n entier naturel supérieur ou égal à 1.

a) Calculer S_1 ; S_2 et S_3. *0,75pt*

b) Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, on a : $S_n = 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$. *1pt*

c) Déterminer la valeur du nombre $A = \sum_{k=10}^{40} \frac{1}{1+2+..+k}$. *0,5pt*

Exercice 2 : 0 4,5 Points

La bibliothèque du collège a établi le bilan de ses activités pour les quatre dernières années. Le tableau ci-dessous donne (en milliers) pour chaque année :

- L'augmentation du nombre de prêts de livres x_i ;
- Le nombre de nouveau lecteurs inscrits y_i ;
- Le nombre de nouveautés achetées z_i.

Années	2017	2018	2019	2020
x_i	3	7	1	5
y_i	0,3	1,4	0,1	0,4
z_i	0,9	3,2	2,1	2,8

1- a) Représenter le nuage de points de la série double $(x_i;\ y_i)$. *1pt*

b) Représenter le nuage de points de la série double $(x_i;\ z_i)$. *1pt*

2- a) Déterminer la valeur approchée du coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i;\ y_i)$. *1pt*

b) Déterminer la valeur approchée du coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i;\ z_i)$. *1pt*

3- Que peut-on conclure ? *0,5pt*

Exercice 3 : (UNIQUEMENT D) 06 Points

Soit (u_n) la suite définie par: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$; f étant la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}x + \sqrt{x}$

1- Etudier le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$. *1pt*

2- Montrer que pour $\forall x \in [2; 4]$, $|f'(x)| \leq \frac{9}{10}$. *1pt*

3- Montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante. *0,75pt*

4- Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \in [2;4]$. **0,75pt**

5- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 4| \leq \frac{9}{10}|u_n - 4|$. **1pt**

6- Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 4| \leq \left(\frac{9}{10}\right)^n$. **1pt**

7- Sachant que $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^n = 0$, déterminer la limite de la suite (u_n). **0,5pt**

Exercice 3 : (UNIQUEMENT TI) 06 Points

A- Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une base de E. On désigne par f est l'application linéaire de E dans E définie analytiquement par : $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = -x + \frac{1}{2}y \end{cases}$.

1- Ecrire la matrice M de f dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. **0,5pt**

2- Montrer que Ker$f$ et Imf sont des droites vectorielles que l'on explicitera. On déterminera une base $\vec{u}$ de ker$f$ et une base $\vec{v}$ de Imf. **2pts**

3- Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de E. **0,5pt**

4- Ecrire la matrice M' de f dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$. **1pt**

B- Soit une suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$; $u_1 = -1$ et $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1- Déterminer X_0 et X_1. **1pt**

2- Démontrer par récurrence que pour tour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$. **1pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES 04,5 POINTS

Situation :

Pour la construction de son nouveau siège, l'INS (Institut National de Statistiques) a acheté un terrain de forme rectangulaire dont les coordonnées géodésiques des sommets sont les points images des solutions de l'équation $[z^2 + (-20 + 40i)z - 300 - 1200i][z^2 + (40 - 20i)z + 300 - 1200i] = 0$. L'unité de longueur est le mètre. L'INS engage un ingénieur en bâtiment pour clôturer la parcelle, celui-ci propose un devis 17 225F par mètre de mur tout en prévoyant une ouverture de 5m pour un portail estimé à 1 002 500F.

La cellule de crise du suivi de la pandémie du COVID19 de l'INS a publié les données du tableau ci-dessous, où x_i est le nombre de cas confirmés et y_i le nombre de guérisons, pour les mois de février à juillet 2020 et en rappelant que le nombre de guérisons dans cette ville en octobre 2020 était de 27.

Mois	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet
x_i	450	480	495	510	525	540
y_i	26	27	29	31	32	35

Paul, élève d'une classe de Tle D voudrait par la méthode des moindres carrés estimer le nombre de guérisons durant ce mois d'octobre 2020.

Un problème ne surgissant jamais seul, l'agence Spatial américaine NASA localise une comète se dirigeant suivant la courbe de la fonction $f: \mapsto 3 + \sqrt{x}$ vers la planète terre et, programme alors le lancement d'un missile longue portée suivant la direction de la courbe de la fonction $g: x \mapsto 2x^2$.

Tâches :

1- Aider Paul à donner cette estimation du mois d'octobre. **1,5pt**

2- Déterminer le montant total du devis présenté par l'ingénieur. **1,5pt**

3- Est-il possible que le missile intercepte la comète ? **1,5pt**