

COLLEGE F. X. VOGT		Année scolaire 2021-2022
Département de Mathématiques	Contrôle	Date : 15 Janvier 2022
Classes: Terminale D & TI	Epreuve de Mathématiques	Durée : 4heures

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES

15,5 POINTS

Exercice 1 : 03,25 Points

Dans cet exercice, \mathbb{C} désigne l'ensemble des nombres complexes et z un nombre complexe.

On pose $P(z) = z^3 - (6 + 5i)z^2 + (3 + 20i)z + 10 - 15i$.

- 1) Montrer que le polynôme P admet une racine sous la forme $3 + ai$ à déterminer. 0,75pt
- 2) a- Déterminer les racines carrées du nombre complexe $\delta = -2i$. 0,5pt
b- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - (3 + 3i)z + 5i = 0$. 0,75pt
- 3) Déterminer les nombres complexes a et b tels que $P(z) = [z^2 + az + b][z - (3 + 2i)]$. 0,5pt
- 4) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $P(z) = 0$. 0,75pt

Exercice 2 : 05,5 Points

On considère la suite numérique $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $w_0 = \frac{1}{2}$, $w_{n+1} = \frac{3w_n}{1+2w_n}$.

On se propose d'étudier la convergence de la suite numérique $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en utilisant deux approches différentes.

A- On considère la suite numérique $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = \frac{w_n}{1-w_n}$.

- 1) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 3. 0,75pt
- 2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_n en fonction de n . 0,5pt
- 3) a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$. 0,75pt
b- En déduire la limite de la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$. 0,5pt

B- Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \frac{3x}{1+2x}$.

- 1) Etudier les variations de la fonction g sur son domaine de définition. 0,75pt
- 2) a- Montrer par récurrence que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. 0,75pt
b- Montrer par récurrence que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par 2. 0,75pt
c- Que peut-on dire de la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$? 0,25pt
- 3) Déterminer alors la limite de la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$. 0,5pt

Exercice 3 : 05 Points

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{3}{4} \sqrt{|x^2 - 4x - 12|}$.

- 1) Montrer que $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} \sqrt{x^2 - 4x - 12} & \text{si } x \in]-\infty; -2] \cup [6; +\infty[\\ \frac{3}{4} \sqrt{-x^2 + 4x + 12} & \text{si } x \in [-2; 6] \end{cases}$ 0,5pt

- 2) Etudier la dérivabilité de la fonction f en -2 et en 6 , puis donner une interprétation graphique des résultats. 1pt

- 3) a- Montrer que $\forall x \in]-\infty; -2] \cup [6; +\infty[, f'(x) = \frac{\frac{3}{4}(x-2)}{\sqrt{x^2 - 4x - 12}}$. 0,5pt

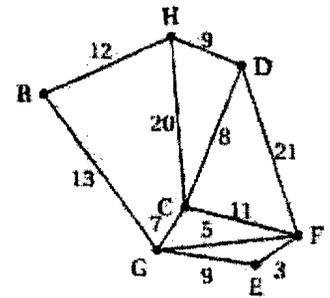
- b- Montrer que $\forall x \in [-2; 6], f'(x) = \frac{\frac{3}{4}(-x+2)}{\sqrt{-x^2 + 4x + 12}}$. 0,5pt

- 4) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation. 0,75pt
 5) Etudier les branches infinies de la courbe représentative de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$. 1pt
 6) Construire la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé. 0,75pt

Exercice 4 : 01,75 Points

On considère le graphe pondéré ci-contre.

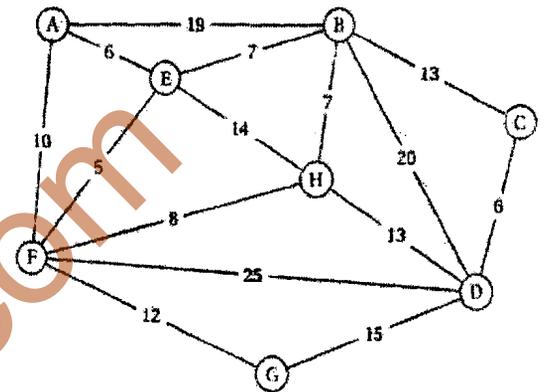
- 1) Ce graphe est-il complet ? Justifier votre réponse. 0,5pt
 2) Répondre par vrai ou faux.
 a- Ce graphe est un graphe connexe. 0,25pt
 b- Ce graphe admet un unique arbre couvrant de poids minimal. 0,25pt
 3) Déterminer un arbre couvrant de poids minimal de ce graphe. 0,75pt



PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES

04,5 POINTS

La coopérative LAFRUITIERE collecte le lait de 7 exploitations de montagne. La situation géographique est représentée par le graphe ci-contre. La coopérative est située au sommet A, les autres sommets B, C, D, E, F, G et H représentent les différentes exploitations ; les arêtes représentent le réseau routier reliant ces exploitations. Les arêtes sont pondérées par les distances entre les exploitations, exprimées en kilomètres. La coopérative doit collecter du lait provenant de l'exploitation D.



Le tableau suivant indique les variations du chiffre d'affaires y_i de cette coopérative selon les frais de publicité x_i au cours de 8 années. (x_i et y_i sont exprimés en millions de francs). En 2005 les frais de publicité s'élevaient à 4,7 millions de Franc.

Années	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
x_i	2	2,3	2,6	2,9	3,2	3,5	3,8	4,1
y_i	52	59	60	65	70	72	73	75

Le responsable de cette coopérative désire augmenter le rendement de la production en dopant les travailleurs avec une substance médicamenteuse. Toutes les heures, on injecte à un sujet, une même dose de 1,8 unité, de cette substance médicamenteuse dans le sang. Les injections sont faites par piqûre intraveineuse. On suppose que la substance se répartit instantanément dans le sang et qu'elle est ensuite progressivement éliminée. En l'espace d'une heure, la quantité de cette substance présente dans le sang diminue de 30%. La première injection se fait à l'instant $t = 0$. Le responsable aimerait savoir quelle quantité de cette substance sera présente dans le sang du sujet dès que la nouvelle injection sera faite et cela en supposant que les injections se font depuis plusieurs heures.

- 1) Quel est le plus court parcours pour se rendre de A à D ? 1,5pt
 2) Quelle était une estimation du chiffre d'affaires de cette coopérative en 2005 ? 1,5pt
 3) Estimer la quantité de cette substance médicamenteuse dans le sang du sujet. 1,5pt