Collège Mgr. F.X. VOGT		ANNÉE SCOLAIRE 2021-2022
DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES	CONTRÔLE	15 janvier 2022
	EPREUVE DE MATHÉMATIQUES	
Niveau : T^{le} C	Durée : **4 h**	Coefficient : 7

Partie A : Evaluation des ressources **15 points**

Exercice 1 : 3,5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}, \vec{k})$. On donne les points $A(1;2;1)$, $B(2;1;1)$, $C(0;1;-1)$et $D(2;4;1)$.

1. Les points A, B, C et D sont-ils non coplanaires ? Justifier la réponse. **0,5 pt**

2.a) Calculer la distance du point C à la droite (AB). **0,25 pt**

b) Calculer la distance du point D au plan (ABC). **0,5 pt**

3. Calculer l'aire du triangle ABC et le volume du tétraèdre $ABCD$. **0,75 pt**

4. On considère la sphère (S) d'équation $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+2=0$ et le plan (P_λ) d'équation $-x+4y-z+\lambda=0$.

Etudier suivant les valeurs de λ les positions relatives de (S) et (P_λ). **0,75 pt**

5. On considère le plan (P) d'équation $2x-2y+z-2=0$ et point $F(1;-2;1)$. Soit (S') la sphère de centre F et de rayon 2.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $(P)\cap(S')$. **0,75 pt**

Exercice 2 : 5 points

Soit f la fonction définie par : $f(x)=x-\sqrt{|x^2-1|}$ et (C_f) la courbe représentant f dans le plan muni du repère orthonormé $(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

1. Déterminer l'ensemble D_f de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de D_f. **0,5 pt**

2.a) Etudier la dérivabilité de f en -1 et en 1, puis interpréter graphiquement les résultats. **1 pt**

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur D_f et en déduire l'ensemble E de dérivabilité de f. **0,75 pt**

3. Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in E$ et étudier son signe suivant les valeurs de x. **1 pt**

4. Dresser le tableau de variations de f. **0,5 pt**

3. Déterminer la nature de la branche infinie de (C_f) au voisinage de $-\infty$, puis la nature de la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$. **0,75 pt**

4. Tracer (C_f) avec soin. **0,5 pt**

Exercice 3 : 3,5 points

Soit (u_n) la suite réelle définie par $u_0=4$ et $\forall\ n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$

1. Démontrer par récurrence que $\forall\ n\in\mathbb{N},\ 0\le u_n\le 2$. **0,5 pt**

2.a) Montrer que : $\forall\ n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n=\dfrac{(1+u_n)(2-u_n)}{u_{n+1}+u_n}$. **0,5 pt**

b) Etudier alors la convergence de la suite (u_n) et déterminer sa limite si elle existe. **1 pt**

3.a) Démontrer pour tout $n\in\mathbb{N},\ |u_{n+1}-2|\le\dfrac{1}{4}|u_n-2|$ **0,5 pt**

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N},\ |u_n-2|\le\dfrac{2}{4^n}$. **0,5 pt**

c) Etudier alors la convergence de la suite (u_n). **0,5 pt**

Exercice 4 : 3 points I et II sont indépendants.

I- On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$u_n = \frac{n}{n^2} + \frac{n}{n^2+1} + \cdots + \frac{n}{n^2+2n} + \frac{n}{n^2+2n+1}$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, $\frac{2n}{n+1} \leq u_n \leq \frac{2(n+1)}{n}$. **1 pt**
2. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse. **0,5 pt**

II- Soit la suite numérique $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$. **0,75 pt**
2. En déduire que cette suite $(u_n)_{n\geq 1}$ diverge. **0,75 pt**

Partie B : Evaluation des compétences **5 points**

Situation :

Le Directeur d'une entreprise va utiliser ses employés pour couler la dalle d'un bâtiment d'une extension de l'entreprise. Pour cela il doit stocker 6000 litres d'eau. Il veut louer à la Mairie de la ville 35 cuves identiques ayant la forme d'un tétraèdre $ABCD$ et ne sait pas si ça va suffire pour stocker les 6000 litres d'eau. Ne connaissant pas le volume d'eau total qu'on peut stocker dans une cuve, il a été repéré dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct, les points $A(-4;6;-1)$, $B(1;2;2)$, $C(-1;4;3)$et $D(-5;7;0)$. L'unité de volume utilisée est le m^3.

Monsieur le Directeur décide récompenser ses employés en tenant compte de leur assiduité. Il répartit ainsi qu'il suit : au premier, il donne $50000\ F$; au $2^{ème}$, le double du premier moins $20000\ F$ et ainsi de suite. A Paul le n-ième employé, malade, le Directeur déclare qu'il lui donne le double du $(n-1)^{ème}$ moins $n \times 10000\ F$ pièces. Myriam, la seule femme de l'entreprise a refusé la $30^{ème}$ place pour la $42^{ème}$ dans l'espoir d'avoir un nombre plus élevé de pièces d'or. Malam, $100^{ème}$ employé, voudrait utiliser cette récompense pour acheter un bœuf d'un montant de $102000\ F$.

Tâches :

1. Le nombre de cuve que le Directeur veut louer sera-t-il suffisant pour le stockage de toute la quantité d'eau nécessaire pour couler la dalle ? **1,5 pt**
2. Myriam a-t-elle fait un bon choix ? **1,5 pt**
3. Avec cet argent, Malam va-t-il pouvoir acheter son bœuf ? **1,5 pt**

Présentation : 0,5 pt