

COLLÈGE F-X. VOGT		Année scolaire 2021-2022
Département de Mathématiques	CONTRÔLE	Date : 11/12/2021
EPREUVE DE MATHÉMATIQUES		
Niveau : PC	Durée : 3 heures	Coefficient: 6

Partie A : ÉVALUATION DES RESSOURCES (15,5 POINTS)

Exercice 1: (4 points)

L'unité de longueur est le centimètre. ABE est un triangle tel que $AB = 4$; $BE = 3$ et $AE = 5$. On désigne par C le point tel que $\overrightarrow{BC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BE}$ et D le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 1, -1 et 1. I est le milieu du segment [AC].

- 1) Montrer que le triangle ABE est rectangle. 0,5pt
- 2) a) Montrer que les points D, I et B sont alignés. 0,75pt
b) Faire une figure et placer les points C et D. 0,5pt
c) Justifier que le quadrilatère ABCD est un carré. 0,5pt
- 3) Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 + MC^2 = 16$.
a) Montrer que $MA^2 - MB^2 + MC^2 = MD^2$. 1pt
b) En déduire la nature et la construction de (Γ) . 0,75pt

Exercice 2 : (4 points)

Dans un repère orthonormé, on considère les $A(1; 2)$, $B(1; -2)$ et $C(5; -2)$. I est le barycentre du système $\{(A; 1), (B; 2)\}$, J le barycentre du système $\{(A; 1), (B; -2)\}$ et G est le barycentre du système $\{(A; 1), (B; -1), (C; 1)\}$. (T) est l'ensemble des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{AC} = -2$ et (C) l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB} = 2$.

- 1) a) Déterminer les coordonnées du point G. 0,5pt
b) Montrer que $M \in (T)$ équivaut à $\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{AC} = -2$. 0,5pt
c) En déduire la nature de (T), puis construire (T). 1pt
- 2) a) Montrer que $M \in (C)$ équivaut à $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$. 0,5pt
b) En déduire la nature de (C). 0,5pt
- 3) Déterminer une équation cartésienne de (T) et de (C). 1pt

Exercice 3 : (7,5 points)

I. Une équation admet deux solutions x_1 et x_2 qui vérifient le système

$$\begin{cases} x_1 x_2 + 2x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 - 2x_1 x_2 + x_2 = 4 \end{cases}$$

- 1) Retrouver cette équation. 0,75pt
- 2) En déduire les valeurs de x_1 et x_2 . 0,75pt

II. Dans une vitrine d'un bijoutier, sont exposés 3 bracelets, 3 bagues, 7 colliers et 7 montres. Une nuit, un voleur a cassé la vitrine. Surpris par le gardien, il s'est enfuit en emportant seulement 4 bijoux attrapés au hasard. Dénombrer les cas suivants :

- 1) le voleur a emporté un bijou de chaque sorte. 0,5pt

- 2) Le voleur a emporté 4 bijoux de même nature. 0,5pt
 3) Le voleur a emporté les 3 bagues. 0,5pt
 4) Le voleur a emporté au moins un collier. 0,5pt

III. On lance 3 fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse au nombre qui apparaît sur la face supérieure du dé. On désigne par a le premier numéro du premier lancé, b celui du deuxième et c celui du troisième lancé.

- 1) Déterminer le nombre de résultats possibles. 0,5pt
 2) Déterminer le nombre de résultats comportant :
 a) Un seul 5. 0,5pt
 b) Exactement un 5 et un 6. 0,5pt
 3) On considère le système $(S): \begin{cases} ax - by = c \\ x - y = 3 \end{cases}$.
 a) Déterminer le nombre de triplets $(a; b; c)$ tels que le système (S) n'ait aucune solution. 0,5pt
 b) Déterminer le nombre de triplets $(a; b; c)$ tels que le système (S) ait une infinité de solutions. 0,5pt
 c) Déterminer le nombre de triplets $(a; b; c)$ tels que le système (S) ait une seule solution. 0,5pt

IV. Résoudre dans $]-\pi; \pi]$, l'inéquation $2\cos^2 x \leq \cos x + 1$. 1pt

Partie B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES (4,5 POINTS)

Situation :

Un colloque regroupe 12 scientifiques composés de 6 hommes et 6 femmes parmi lesquels 5 mathématiciens, 3 physiciens et biologistes. Les scientifiques devraient prendre place à l'extrade sur 12 places. L'organisateur demande aux scientifiques de prendre place et ces derniers proposent trois manières de s'asseoir :

- Les mathématiciens proposent que chacun choisisse une place au hasard ;
- Les physiciens préfèrent que les personnes de même discipline restent côte à côte ;
- Les biologistes disent qu'il serait mieux que les hommes se placent ensemble et que les femmes fassent de même.

Tâches :

- 1) Calculer le nombre de façons de s'asseoir suivant les mathématiciens. 1,5pt
 2) Calculer le nombre de façons de s'asseoir suivant les physiciens. 1,5pt
 3) Calculer le nombre de façons de s'asseoir suivant les biologistes. 1,5pt