Collège Mgr. F.X. VOGT		ANNÉE SCOLAIRE 2021-2022
DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES	SESSION INTENSIVE	02 novembre 2021

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Niveau : T^{le} C | Durée : 4 h | Coefficient : 7

Partie A : Evaluation des ressources **15 points**

Exercice 1 : 3,25 points

On considère la fonction f de la variable complexe définie par :

$$f(z) = \frac{1}{2}z^3 + (-4 + 7i)z^2 - \left(\frac{9}{2} + 26i\right)z + 15i + 36 .$$

1. Démontrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0. **0,75 pt**

2.a) Déterminer les nombres complexes a , b et c tels que pour tout nombre complexe z,

$f(z) = (z - 3)(az^2 + bz + c)$ **0,75 pt**

b) En utilisant les valeurs des nombres complexes a , b et c trouvées à la questions 2a), résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $az^2 + bz + c = 0$ **1,25 pt**

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$ **0,5 pt**

Exercice 2 : 4,25 points

I- Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 5, on considère les nombres

$a = n^3 - n^2 - 12n$ et $b = 2n^2 - 7n - 4$

1. Montrer que les nombres a et b sont divisibles par $n - 4$. **0,5 pt**

2. On pose $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$ et on note $\delta = PGCD(\alpha, \beta)$.

a) Démontrer que δ est un diviseur de 5. **0,5 pt**

b) Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si $n - 2$ est multiple de 5. **0,75 pt**

3. Montrer que $2n + 1$ et n sont premiers entre eux. **0,25 pt**

4.a) Déterminer, suivant les valeurs de n et en fonction de n, le PGCD de a et b. **0,75 pt**

b) Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ puis $n = 12$. **0,5 pt**

II-Trouver les paires d'entiers naturels non nuls a et b tels que :

$PGCD(a; b) + PPCM(a; b) = 111.$ **1 pt**

Exercice 3 : 4,5 points

I- Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit f l'application de $\mathbb{C}\backslash\{-4i\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = \frac{z-2i}{iz-4}$.

On pose $z = x + iy$ où x, y sont des nombres réels.

1. Déterminer et construire l'ensemble (Σ) des points $M(x; y)$ du plan tels que $f(z)$ soit réel. **1 pt**

2. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points $M(x; y)$ du plan tels que :

$Re(f(z)) = 0$ et $Im(f(z)) > 0$. **0,75 pt**

3. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points $M(x; y)$ du plan tels que $|f(z)| = 2$. **0,75 pt**

II- On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 - \lambda(1+i)z^2 + i\lambda^2 z = 0$, où λ est un paramètre complexe non nul.

1. Résoudre l'équation (E). **1 pt**

2. Déterminer λ pour que l'équation (E) admette $1+i$ comme racine. Résoudre (E) dans chacun des cas trouvés. **1 pt**

Exercice 4 : 3 points

I- Soit p un nombre premier.

1.a) Démontrer pour tout entier naturel i strictement compris entre 0 et p, C_p^i est multiple de p. **0,75**

b) En déduire que pour tous entiers relatifs a et b, on a : $(a+b)^p \equiv a^p + b^p\ [p]$. **0,5 pt**

2.a) Démontrer que : $\forall a \in \mathbb{N}, a^p \equiv a\ [p]$. **0,75 pt**

b) En déduire que pour tout entier naturel a premier avec p, on a : $a^{p-1} \equiv 1\ [p]$. **0,5 pt**

II- Montrer que $a^4 + 64$ n'est pas premier, quel que soit a entier au moins égal à 1. [On pourra utiliser le développement de $(a^2+8)^2$] **0,5 pt**

Partie B : Evaluation des compétences **5 points**

Situation :

A l'occasion du partage marquant la fin d'une excursion organisée après l'examen Baccalauréat par une classe de terminale au Collège F. X. VOGT, le parent Délégué dispose de 20000 francs pour l'achat de bières en bouteilles coûtant 700 francs chacune et de jus en bouteilles coûtant 400 francs chacun. Il doit dépenser la totalité de cette somme d'argent pour l'achat de ces deux types de boisson. Avec la présence du titulaire de la classe qui ne boit que la bière, il faut acheter au moins une bière. Chaque participant a droit à une seule bouteille.

A la fin de la cérémonie, la décoratrice doit ranger tous les bouquets de fleurs qui se trouvaient sur les tables soit en tas de 7, soit en tas de 11. Elle sait qu'elle avait entre 400 et 462 bouquets de fleurs et qu'aucun bouquet n'a disparu. Si elle fait des tas de 7, il lui reste cinq bouquets de fleurs. Si elle fait des tas de 11 bouquets de fleurs, il lui reste deux bouquets de fleurs. Elle aimerait connaître le nombre de ses bouquets de fleurs pour mieux les ranger.

Le père de Marlyse qui a voyagé une semaine avant le résultat du BACC C pour plusieurs mois, a laissé avant son départ une valise contenant de précieux cadeaux qu'elle devra ouvrir si elle obtient la mention Excellente. Pour ouvrir cette valise, il faut un code à 6 chiffres. Le père de Marlyse qui veut que sa fille soit la seule à la maison à pouvoir décoder, a pris soin connaissant les capacités de sa fille Marlyse de coller sur cette valise une plaque sur laquelle il est écrit : le code à 6 chiffres est le plus petit nombre N divisible par 63 qui s'écrit $\overline{1x1yxy}$. Marlyse a effectivement obtenu la mention Excellente et doit ouvrir la valise sans dégâts.

Tâches :

1. Quel est le nombre de bouquets de fleurs de cette décoratrice ? **1,5 pt**
2. Quel est le nombre qui permettra à Marlyse de découvrir ses précieux cadeaux ? **1,5 pt**
3. Quels sont les nombres possibles de bouteilles de bières et de jus qu'il peut acheter et quel est le nombre de bouteilles de bières et de bouteilles de jus qu'il faut pour satisfaire le plus grand nombre de personnes ? **1,5 pt**

Présentation : 0,5 pt