REPUBLIQUE DU NIGER
D.R.E.S MARADI
D.D.E.S VILLE DE MARADI

MATHS SERIE D

Série sur les fonctions

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \cdots$$

Rédacteur : Sani Ali   C.E.S Ali Dan Sofo Maradi

Edition : 2019   Tel : 96290500

Série 2018 sur les fonctions

Exercice 1

I. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité : 1 cm).

1) Ecrire sous la forme $f(x) = \mathrm{a}x + \mathrm{b} + \dfrac{1}{x-1}$, a et b sont des réels à déterminer.

2) Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de f.

3) Déduire de 1) et 2) que (C) admet deux asymptotes dont on donnera les équations.

1) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
2) Montrer que le point I (1, -1) est un centre de symétrie de la courbe (C).
3) Tracer la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

II. Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$V_n = f(n+1) - \frac{1}{n}$$

1) Montrer que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.
2) Soit $S_n = V_0 + V_1 + \cdots . + V_n$. Exprimer S_n en fonction de n.

Exercice 2

On considère la fonction numérique f de la variable x définie par :

$$f(x) = |x - 3| - \frac{2}{x-1}$$

1. Etudier la continuité de f au point $x_0 = 3$? puis sur R.
2. La fonction f est-elle dérivable au point $x_0 = 3$? calculer la dérivée de f sur les intervalles où elle est dérivable.
3. Etudier les variables de f
4. Dans un repère orthonormé$(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath},)$, construire la courbe représentative (c) de f. on prendra pour unité le centimètre. on étudiera avec soin les branches infinies. On montrera qu'au point A d'abcisse3, il existe deux demi-tangentes que l'on construira.
5. Calculer l'aire $s(\lambda)$ de l'ensemble des points de cordonnées (x, y) tels que :
$$\begin{cases} \lambda \le x \le \lambda^2 \\ f(x) \le y \le x - 3 \end{cases} avec\ \lambda > 3$$

Cette aire s (λ) admet-elle une limite quand $\lambda \to +\infty$?

6. Déduire de l'étude faite dans la question 3) que l'équation

$\begin{cases} x \in [3,+\infty[\\ f(x) = 0 \end{cases}$ Admet une solution x_0. Calculer ensuite x_0.

Soit φ la restriction de f à l'intervalle $[3,+\infty[$. Montrer que φ admet une fonction réciproque h dont on indiquera les variations sans calculer $h(x)$.

Calculer $h(\frac{3}{2})$ et $h'(\frac{3}{2})$.

Construire la représentation graphique (C') de h dans le même repère que (C).

7. A l'aide de la courbe (C), étudier le nombre de solution de l'équation

$$\frac{2+mx-m}{x-1} = |x-3| \qquad \text{où } m \text{ désigne un paramètre réel.}$$

Exercice 3

Soit la fonction numérique de la variable réelle qui à x associe

$$f(x) = \frac{(x+2)^2 - |x+2|}{x-1}$$

Soit C la représentation graphique de f dans un repère $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.

1) a) Etudier la continuité puis la dérivabilité de f au point $x_0 = -2$.

En déduire quel admet deux demi-tangentes au point d'abscisse $x_0 = -2$.

b) Etudier les variations de *f*.

II) a) Déterminer les réels a, b, c, a', b', c' tels que :

$F(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$, pour tout *x* de l'intervalle $[-2,+\infty[$ autre que 1.

$F(x) = a'x + b' + \frac{c'}{x-1}$ Pour tout x de l'intervalle $]-\infty,-2]$

b) Montrer que C admet deux asymptotes obliques D_1 et D_2 dont on donnera les équations.

c) Dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité : 1 cm), construire les demi-tangentes au point d'abscisse -2 ; D_1 ; D_2 puis C.

III) a) Faire un graphique plus précis sur l'intervalle$[-3,1]$. Pour cela : on considère un nouveau repère orthogonal $(O,\vec{\imath'},\vec{\jmath'})$ du plan en prenant 5 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 20cm pour unité sur l'axe des ordonnées. Construire les demi-tangentes au point d'abscisse -2 ainsi que les tangentes aux points d'abscisse -3 et -1, puis la représentation graphique de f sur l'intervalle$[-3,-1]$.

b) Calcul en cm^2 l'aire du domaine plan défini par :

$$\begin{cases} -3 \leq x \leq -1 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

Le plan étant rapporté à un repère $(O, \vec{\imath'}, \vec{\jmath'})$.

Exercice 4

On considère la fonction numérique *f* d'une variable réelle définie par :

$$x \longmapsto x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$$

Et on appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonale

(o, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$) avec $\|\vec{\imath}\|$= 4 cm et $\|\vec{\jmath}\|$= 2 cm.

1) Etudier la continuité de *f*.

2) Etudier la dérivabilité de *f*, en particulier en $x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{1}{2}$.

Calculer la dérivée de *f* sur chaque intervalle où elle est dérivable.

3) démontrer les équivalences suivantes :

a) $\sqrt{4x^2 = 1} + 4x < 0 \Leftrightarrow x \epsilon \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$

b)$\sqrt{1 = 4x^2}$= 4x$> 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{5}}\right[$

En déduire le signe de *f'* (x)

4) a) calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

Dresser le tableau des variations de *f*.

b) Calculer $\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x]$ et $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 3x]$.

En déduire que la courbe (*C*) admet deux asymptotes d'équations respectives : $y = -x$ et $y = 3x$.

Tracer la courbe (*C*).

5) a) soit *h* la restriction de *f* à l'intervalle$\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$.

Montrer que *h* admet une fonction réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition et les variations.

b) Calculer $\lim_{x \to +\infty} [x + h^{-1}(x)]$ et en déduire que la courbe représentative(Γ).

c) Calculer $h^{-1}(0)$ et déterminer une équation de la tangente à (Γ) au point de coordonnées $(0, h^{-1}(0))$.

Exercice 5

On donne la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - 3}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer la dérivée de f et dresser le tableau de variation.
3. Calculer la limite $\lim_{+\infty} f$.On pourra montrer que : f(x) = $\frac{1- e^{-x}}{1- 3e^{-x}}$
4. Construire (φ) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. On tracera les asymptotes et les points d'abscisses -1 ; 0 ; 1 et 2.
5. A l'aide de la courbe obtenue, discuter selon le nombre réel a, le nombre de solution de l'équation f(x) = a. x étant l'inconnue réelle et a un paramètre réel.

NB : $\log 3 \simeq 1.10 \;\; et \;\; e \simeq 2.72$

Exercice 6 TC

Partie A

Soit h la fonction définie par : h (x) = $2e^x - (x + 2)$

1) Calculer les limites de h en -∞ et en +∞.
2) Calculer l'expression h' (x) de la fonction dérivée de h, étudier son signe puis dresser le tableau de variation de h.
3) a) Montrer que l'équation h (x) = 0 admet une solution unique α dans l'intervalle$]-\propto; -ln2[$. vérifier que α$\epsilon\ ]-2; -1[$.

   b) Calculer h(0) puis déterminer le signe de h (x) suivant les valeurs de x.

Partie B

Soit g la fonction définie par : $g(x) = \dfrac{1 - 2e^x}{1 + 2xe^x}$

(C) est la courbe représentative de g.

1. Soit t la fonction définie sur R par : t = 1 + $2xe^x$

a) Calculer l'expression $t'(x)$ de la fonction dérivée de t, déterminer le sens de variation de t.

b) Calculer $t(-1)$ puis, déterminer le signe de $t(x)$ suivant les valeurs de x.

c) En déduire que la fonction g(x) est $définie\ sur$ ℝ.

2) Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

3) a) Calculer $g'(x)$ l'expression de la fonction dérivée de g. Exprimer $g'(x)$ en fonction de $h(x)$.

b) En déduire le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de dresser le tableau de variation de g.

4) a. Etablir une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $-ln\alpha$.

b. Construire (C), ses asymptotes et (T).

NB : pour α on prendra comme valeur -1,6 et pour g(α) on prendra la valeur 1,7.

Exercice 7 TC

Soit la fonction f définie sur$]0;\infty[$ par $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = -x + xlnx \quad pour\ x > 0 \end{cases}$

On désigne par (T) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé$(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (Unité : 2cm).

1) Calculer $f(1)$ et $f(e)$.
2) Etudier les branches infinies :
a) Calculer la limite de f en $+\infty$.
b) Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
c) Interpréter graphiquement ce résultat.
3) Etude de la dérivabilité de f en 0.
a. Démontrer que f est continue à droite en 0.
b. Etudier la dérivabilité de f à droite de 0.
c. Préciser la tangente à (T) en 0.
4) La fonction f est dérivable sur $]0;\infty[$ et on note f' sa dérivée.
a) Déterminer $f'(x)$ pour tout x élément de $]0\,;\infty[$.
b) Dresser le tableau de variation de f.
c) Donner une équation de la tangente (D) à (T) au point d'abscisse e.
5) Construire (D) et (T).
6) Soit t un nombre réel tel que : 0 < t < 1.
a. En utilisant une intégration par parties, démontrer que l'aire A(t) de la partie du plan limitée par la courbe (T),la droite (OI) et les droites d'équations : $x = t$ et $x = e$ est égale à $\frac{1}{4}e^2 + \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}lnt\right)t^2$
b. Calculer la limite de A(t) quand t vers 0.

Exercice 8 Tc

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{I}, \vec{J})$. L'unité est le cm.

Partie A

Soit g la fonction dérivable et définie sur R par : $g(x) = x + (ax + b)e^{-x}$ où a et b sont des nombres réels.

On désigne par (C) la courbe représentative de g et (D) la droite d'équation : $y = x$

1) a) On donne $g(0) = 1$. Déterminer la valeur de b.
b) On admet que la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est parallèle à la droite (D). Déterminer la valeur de a.

2) Soit h la fonction dérivable et définie sur R par : h(x) = $e^x - x$

a. Soit h', la dérivée de h .Calculer h'(x), pour tout x élément de R.

b. Dresser le tableau de variation de h .On ne calcule pas les limites de h en $-\infty$ $et\ en$ $+\infty$.

c. En déduire que : $\forall x \epsilon R, h(x) > 0$

Partie B

Soit f la fonction dérivable et définie sur R par : $f(x) = x + (x+1)e^{-x}$

1. a) Cal culer la limite de f en $-\infty$.

b) Justifier que : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

c) Donner une interprétation graphique de ces résultats.

2. a) Calculer la limite de f en $+\infty$

b) Démonter que (D) est une asymptote à (C) en $+\infty$

c) Etudier les positions relatives de (C) et (D).

3.a) On désigne par f' la fonction dérivée de f.

Démontré que :$\forall x \epsilon R, f'(x) = e^{-x}h(x)$

b) Déterminer le sens de variation de f.

c) Dresser le tableau de variation de f.

4) Construire sur le même graphique (T), (C), et (D).

5) a) Démontrer que f est une bijection de R sur R.

b) On note par f^{-1} la bijection réciproque de f. Calculer $f^{-1}{}'(-1)$

c) Construire (Γ) la courbe représentative de f^{-1} sur le même graphique que (C)

Partie C

On pose$\forall n\epsilon\mathbb{N}$, $I_n = \int_{-1}^{n}(t+1)e^{-t}\,dt$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :
$\forall n\epsilon\mathbb{N}$, $I_n =(-2-n)e^{-n} + e$.
2. Calculer l'aire A_n en cm² de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations x = -1 et x = n.
3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$.

Exercice 9

Le plan est muni d'un repère orthonormé$(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. L'unité est 2cm. On considère la fonction f dérivable et définie sur$]-\infty;1]$ par : $f(x) = x^2 - 1 + \ln(1-x)$. On note (C) le courbe représentative de f.

1) a) Calculer la limite de f en -∞.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$puis donner une interprétation graphique du résultat.

c) Calculer la limite de f à gauche en 1 puis donner une interprétation graphique du résultat.

2) a) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]-\infty\,;1[$, Calculer $f'(x)$.

b) Démontrer que f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;1[$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Démontrer que l'équation (E) $x \in\,]-\infty\,;1[\ f(x) = 0$ admet une solution unique α.

b) Justifier que $-0{,}7 < \alpha < -0{,}6$

4) a)Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est :

$y = -x - 1$

b) On donne le tableau suivant :

x	-2	-1,5	-1	-0,75	-0,5	-0,25	0,25	0,5	0,75
F(x)	4,1	2,2	0,7	0,1	-0,3	-0,7	-1,2	-1,4	-1,8

Tracer (T) et (C).

Exercice 10 TC

On considère la fonction g dérivable et définie sur $]0\,;\,+\infty\,[$ par : $g(x) = e^x + 2lnx$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$

b) Calculer $g'(x)$

c) Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

2) a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$) admet une solution unique α sur $]0\,;\,+\infty\,[$.

b) Vérifier que $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$

c) Démonter que :

$\forall x \in\,]0\,;\,\alpha\,[\,,\ g(x) < 0.$

$\forall x \in\,]\alpha\ ;\,+\infty\,[\,,\ g(x) > 0$

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\,+\infty\,[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = e^x + 2xlnx - 2x & si\ x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

On note (C.) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité est 4 cm.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

b) Interpréter graphiquement les résultats.

2) a) Démontrer que f est continue en 0.

b) Démontrer que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$

c) La fonction f est-elle dérivable en 0 ? justifier la réponse.
d) Interpréter graphiquement les résultats de la question 2)b).

3) On admet que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$

a) Démontrer $\forall x \in]0\ ;\ +\infty[\ ,\ f'(x) = g(x)$
b) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
4) Tracer la courbe (C) sur l'intervalle [0 ; 2]

Exercice 11 TC

On considère la fonction f définie par : $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$.

On désigne par (C_f) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

a) Calculer les limites de f en -∞ et en +∞.
b) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
c) Montrer que les droites (D) et (D') d'équations respectives $y=1$ et $y=-x+1$ sont asymptotes à (C_f) respectivement en +∞ et en -∞.
d) Construire (C_f).
e) Montrer que f est une bijection réciproque de R sur un ensemble K que l'on précisera.
f) Soit f^{-1} la bijection réciproque de f. Dresser le tableau de variation de f^{-1}.
g) Calculer f(0) et en déduire $(f^{-1})'\left(\frac{3}{2}\right)$.
h) Représenter graphiquement f^{-1}

Exercice 12

Soit la fonction numérique f dérivable et définie de R vers $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$$

1. Trouver l'intervalle j tel que : $J = f([0;+\infty[\ )$.
2. Montrer que f est une bijection de $[0;+\infty[$ sur J.
3. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
4. Représenter graphiquement (C_f) la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.
5. Sans calculer l'application réciproque f^{-1} représenter graphiquement (Cf^{-1}) la courbe de f^{-1}.
6. Calculer $(f^{-1})'\left(\frac{3}{4}\right)$.

Exercice 13

A) On considère l'équation différentielle : $y'' - 2y' + y = x - 1$ (E_1)

1. Déterminer les réels a et b pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = ax + b$, soit solution de l'équation différentielle (E_1).

2. Démontrer qu'une fonction h, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E_1) si et seulement si la fonction $h - g$ est solution de l'équation différentielle : $y'' - 2y' + y = 0 \quad (E_2)$
3. Résoudre l'équation différentielle (E_2)
4. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_1).
5. Trouver la solution de (E_1) vérifiant les conditions $h(0) = 0 \; et \; h'(0) = 0$

B) Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; I, J). Unités : 1cm
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 - e^x$ et (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; I, J).

1) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2) Montrer que la droite (D) : $y = x + 1$ est asymptote oblique à (C) a $-\infty$.
3) Tracer (D) et (C) dans le repère orthonormé (O ; I, J).
4) a) Soit α un réel strictement négatif. Calculer l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan comprise entre la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = \alpha \; et \; x = 0$

$b) \; Calculer \; \lim_{\alpha \to -\infty} (A(\alpha))$

5) Montrer que la restriction de f à $[0, +\infty[$ est une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
6) Tracer la courbe représentative de la réciproque de cette bijection sur le même graphique que (C).

C) Soit m un réel et la fonction f_m définie par $f_m(x) = m(x + 1) - e^x$. On note Γ_m la courbe représentative de f_m .

1. Trouver l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles f_m admet un maximum.
2. Soit le point M_m ordonnée maximale de Γ_m. Donner une équation de l'ensemble des points M_m

Exercice 14 : Bac Niger 1984

I. Soit f la fonction définie de $\mathbb{C} - \{1\}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$F(z) = \frac{z^2}{i(1 - z)}$$

1) On pose $z = x + iy$; $(x, \; y) \epsilon \mathbb{R}$. Montrer que la partie réelle de $F(z)$ est égale à $\frac{y(-x^2 - y^2 + 2x)}{(1-x)^2 + y^2}$. Déterminer la partie imaginaire de F(z).
2) Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z tels que F(z) soit imaginaire pur. Représenter cet ensemble.

II. Soit la fonction définie par $f(x) = |x|\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x = 0$ et en $x = 1$.
3. Montré que pour $x \epsilon]-1; 0[\cup]0; 1[$,

$$f'(x) = |x|\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\;\frac{1-x-x^2}{x(1-x^2)}$$

4. a) Etudier les variations de f.

b) Déterminer les équations des demi-tangentes aux points d'abscisses 0 et 1, et de l'asymptote à la courbe (C) représentant la fonction de f.

c) Construire (C) dans le repère orthonormé (O ; I, J). (Unité : 2cm).

5. Déterminer l'ensemble H des points M du plan complexe d'affixe z tels que F(z) soit réel. Déduire la représentation de H de la courbe (C).

Exercice 15 : Bac Niger 1986

NB : Dans tout le problème, la notation ln désigne le logarithme népérien de x. On rappelle que $ln2 \cong 0.69$.

A. Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie par :
$f(x) = 2x^2 + 1 - lnx$.

1) Etudier les variations de f et tracer la courbe représentative de cette fonction dans le repère orthonormé (O, I, J). (Unité : 2 cm).

2) Déduire de cette représentation que : $\forall x \in]0;+\infty[\,, f(x) > 0$.

B. Soit g la fonction numérique à variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} g(x) = 2x + \dfrac{ln|x|}{x} & si\ x \in]-\infty;0[\cup]0;+\infty[\\ g(0) = 0 \end{cases}$$

1) Quel est le domaine de définition de g?

La fonction est-elle continue en $x_0 = 0$? Est-elle dérivable en ce point ?

2) Montrer que la fonction g est impaire et en déduire une propriété de la courbe (C) représentant ses variations.

3) Calculer g'(x) pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et déduire de la partie A le sens de variation de g.

Etudier la limite de g(x) quand x tend vers +∞ et démontrer l'existence d'une asymptote oblique. Préciser la position de (C) par rapport à cette asymptote.

4) Faire le tableau des variations de g et tracer la courbe (C) dans un nouveau repère (Unité : 1 cm). On précisera en particulier l'intersection de (C) avec son asymptote oblique.

5) Soit $a > 1$. Calculer, en fonction de a, l'aire $A(a)$ de la surface comprise entre (C), l'asymptote oblique et les droites d'équations $x = 1$ et $x = a$.

Quelle est la limite de $A(a)$ quand a tend vers $+\infty$

Exercice 16 : Bac Niger 1996

A. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{x^2 - x} & \text{si } x\epsilon]-\infty; 0] \\ x^2 \ln x & \text{si } x\epsilon]0; +\infty[\end{cases}$$

(Où ln désigne le logarithme népérien de x).

Soit C la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O, \vec{I}, \vec{J})$ du plan (Unité : 1 cm).

1) f est-elle continue en 0 ?
2) f est-elle dérivable en 0 ? signification graphique.
3) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et étudier les variations de f.
4) Montrer que la droite d'équation $y = 2x - \frac{1}{2}$ est asymptote à C lorsque x tend vers $-\infty$. Etudier le signe de $f(x) - (2x - \frac{1}{2})$ sur $]-\infty; 0]$.

Quelle conséquence graphique peut-on tirer ?

5) Construire la courbe C.

B. Soit φ l'application de $]-\infty; 0]$ dans R telle que $\varphi(x) = f(x)$

1) Montrer que φ est une bijection de $]-\infty; 0]$ sur un intervalle J que l'on précisera. On notera φ^{-1} la réciproque de φ.
2) Montrer que, quel que soit $x \in J$, $\varphi^{-1}(x) = \frac{x^2}{2x-1}$
3) On notera (Γ) la courbe représentative de φ^{-1}. Préciser le tableau de variations, les asymptotes et autres propriétés utiles de φ^{-1}. Tracer (Γ) dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$.
4) a) Montrer que, quel que soit $x \in J$,

$$\varphi^{-1}(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{2x - 1} \quad ,(\alpha, \beta, \gamma) \text{ Étant trois constantes réelles à déterminer.}$$

b) Donner une primitive de $\varphi^{-1}(x)$

5) a) Calculer en cm², l'aire A_1 de l'ensemble E_1 des points M(x, y) : $\begin{cases} -1 - \sqrt{2} \leq x \leq -1 \\ -1 \leq y \leq \varphi^{-1}(x) \end{cases}$

b) Calculer en cm², l'aire A_2 de l'ensemble E_2 des points M(x, y) : $\begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ x \leq y \leq \varphi^{-1}(x) \end{cases}$

c) En déduire l'aire de $E_1 \cup E_2$, puis l'aire A de l'ensemble des points M(x, y)

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$$

Exercice 17 : Bac Niger 1995

A. On considère la fonction f_m définie sur R par :

$$f_m(x) = \frac{e^{mx} + 1}{e^x} , \qquad \text{où m est paramètre réel.}$$

1) On désigne par C_m la courbe représentative de la fonction f_m.
a) Montrer que les courbes C_m passent par un point fixe.

b) Suivant les valeurs de m, calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x)$.

c) Pour quelles valeurs de m, les courbes C_m admettent-elles un extremum M_m.
Donner les coordonnées de M_m.

d) Parmi les courbes C_m, déterminer celle dont la tangente au point de coordonnées $(0, 2)$ est parallèle à la première bissectrice des axes. Donner alors l'équation de cette tangente.

2) Etudier les variations de f_{-1} et f_2.

a) Tracer les courbes C_{-1} et C_2.

b) Montrer que la restriction de f_2 à $[0, +\infty[$ admet une fonction réciproque ${f_2}^{-1}$. Tracer la courbe T de ${f_2}^{-1}$.

c) Soit α un nombre réel strictement positif.

i. Calculer l'aire S(α) du domaine du plan délimité par les courbes C_{-1} et C_2, les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$.

ii. Déterminer l'ensemble des valeurs de α pour lesquelles $S(\alpha) = S(-\alpha)$.

NB : Les courbes C_{-1}, C_2 et T doivent être tracées dans le même repère.

Exercice 18 : Bac Niger 1999

Soit m un paramètre non nul. On considère réel la fonction numérique g_m définie par :

$$\begin{cases} g_m(x) = x(-1 + \ln(mx)) & si\ x \neq 0 \\ g_m(0) = 0 \end{cases}$$

I. 1) a. Déterminer suivant les valeurs de m, l'ensemble de définition de g_m.

b. Etudier en fonction de m, la continuité et la dérivabilité de g_m en $x_0 = 0$.

2) Etudier les variations de $g_m$et donner en fonction de m, les différents tableaux de variation de g_m.

3) On note (C_m) la courbe représentative de la fonction g_m dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{I}, \vec{J})$ (Unités : 2cm).

Comparer $-g_m(x)$ et $g_{-m}(x)$. Quelle conclusion géométrique peut-on tirer pour les courbes représentatives (C_m) et (C_{-m}) des fonctions $-g_m(x)$ et $g_{-m}(x)$.

II. On pose $m = 1, m = 2$.

1. En utilisant les résultats précédents, déduire les tableaux de variations des fonctions g_1 et g_2.
2. Etudier les branches infinies de g_1 et g_2.
3. Soit f_1 la restriction de g_1 à$[1, +\infty[$. Démontrer que f_1 admet une fonction réciproque ${f_1}^{-1}$ dont on donnera les propriétés essentielles. (On ne demande pas de calculer${f_1}^{-1}(x)$).

Donner l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0. (T désigne la courbe représentative de ${f_1}^{-1}$).

III. 1) Etudier la position de (C_1) par rapport à (C_2).

2) Tracer dans le même repère les courbes (C_1), (C_2) et (T).

3) Déterminer l'aire de la partie du plan délimité par les droites d'équations :

$x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{e}{2}$ et les courbes (C_1), (C_2).

4) On considère la fonction numérique h définie par :

$$\begin{cases} h(x) = x(-1 + \ln(2|x|)) & x \neq 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

Utiliser les résultats précédents pour déduire le tracé de la courbe représentative de la fonction h. (On pourra s'aider de la parité de h).

Exercice 19 : Bac Niger 2000

La partie est indépendante des parties A et B.

A) On considère les deux équations différentielles (E) et (H) suivantes dans lesquelles y est une fonction numérique de la variable réelle x, e désignant la base du logarithme népérien :

$(E) : y'' - 9y = 6e^{-3x}$

$(H) : y'' - 9y = 0$

1) Vérifier que la fonction numérique U définie par : $U(x) = -xe^{-3x}$ est une solution particulière de (E).
2) Déterminer la solution générale de l'équation (H).
3) Soit f une fonction numérique deux fois dérivable.

a) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $(f - u)$ est solution de (H)

b) En déduire toutes les solutions de (E) et donner la solution particulière f de (E) vérifiant : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \; et \; f'(0) = 0$.

B) On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie par :

$$g(x) = -\left(x + \frac{1}{3}\right)e^{-3x}$$

Soit (C) la courbe représentative de g dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{I}, \vec{J})$ (Unité 3 cm).

1) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
2) Donner l'équation de la droite (T_1)tangente à la courbe (C) au point d'abscisse $x = -\frac{1}{3}$
3) Donner l'équation de la droite (T_2) tangente à la courbe (C) au point d'abscisse $x = \frac{1}{3}$
4) Tracer (T_1), (T_2) et (C)
5) Soit t un réel positif. Calculer l'intégrale : $I(t) = \int_{-\frac{1}{3}}^{t} g(x)dx$.
6) Déterminer la limite de *I(t)* lorsque $t \to +\infty$

C) Soient a et b deux nombres réels.

On considère la fonction numérique $f_{a,b}$ de la variable réelle x définie par :

$$f_{a,b}(x) = [x^2 - 2(a + 1)x + 2(a + 1) + b]e^x$$

1) Etudier le sens de variation de la fonction $f_{a,b}$ et dresser son tableau de variation ; discuter selon les valeurs de a et b.
2) On suppose que les réels a et b sont les résultats de deux lancers successifs d'un dé dont les faces, numérotés de 1 à 6, ont la même probabilité d'apparition.

Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

Evènement A : « $f_{a,b}(0) \geq 12$ »

Evènement B : « $f_{a,b}$ admet un maximum et un minimum »

Exercice 20 : Bac Niger 2001

Le problème comporte deux parties : I et II

Partie I :

n, étant un entier naturel non nul, on note f_n la fonction de la variable réelle x définie dans l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$f_n(x) = x - n + \frac{n}{2}\ln(x)$, ln désignant logarithme népérien.

1. Dresser le tableau de variation de f_n. En déduire l'existence $d'un\ réel\ unique\ \alpha_n$ solution de l'équation $f_n(x) = 0$.
2. Démontrer que $1 \leq \alpha_n \leq e^2$ et que $\ln(\alpha_n) = 2 - \frac{2}{n}\alpha_n$.
3. Exprimer $f_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de α_n et de n, puis en déduire le sens de variation de la suite de terme général α_n.
4. Démontrer que la suite de terme général α_n est convergente. On note l sa limite.
5. En utilisant les résultats de la deuxième question, calculer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\ln(\alpha_n)$. En déduire l.

Partie II :

Soit g la fonction définie dans l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$g(x) = \frac{2x - \ln(x)}{2\sqrt{x}}$ et La fonction h définie par : $h(x) = \sqrt{x}$.

$(C) et\ (C')$, désignent les représentations graphiques de g et h respectivement dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan (unité : 2 cm).

1. Calculer les limites de g lorsque x tend vers 0 et lorsque x tend vers $+\infty$
2. Vérifier que $g'(x) = \frac{f_l(x)}{2x\sqrt{x}}$

En déduire le tableau de variation de g.

3. Préciser les positions relatives des deux courbes $(C) et\ (C')$ et calculer la limite lorsque x tend vers$+\infty\ de\ [g(x) - h(x)]$.
4. Tracer les courbes $(C) et\ (C')$
5. On pose : $I = \int_1^2 g(x)dx$

a) Calculer : $I = \int_1^2 \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}}dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

b) En déduire la valeur de I.

Exercice 21 : Bac Niger 2005

Soit f la fonction numérique définie sur ℝ par $f(x) = \sqrt{3x^2+1} + x\sqrt{3}$.

A. 1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Etudier le comportement de f aux bornes de son domaine de définition.

3) Etudier les variations de f.

4) On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) d'axe $x'Ox$ et $y'Oy$. Préciser les asymptotes à la courbe (C).

Construire la courbe (C).

B. Soit la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$g(x) = x\sqrt{3} - \sqrt{3x^2+1}$.

1) On désigne par (C') la courbe représentative de g.
a) Montrer que (C') se déduit de (C) par la symétrie de centre O.
b) Tracer (C') dans le même repère que (C).
2) Soit I et J deux points appartenant respectivement à (C) et (C') et tels qu'ils aient même projeté orthogonal K sur la droite $x'Ox$. Montrer qu'on a :

$\overrightarrow{KI}.\overrightarrow{KJ} + 1 = 0$.

3) On désigne par (H) la réunion des courbes (C) et (C'). Montrer qu'un point M appartenant à (H) si et seulement si ses coordonnées (x, y) vérifient l'équation :$y^2 - 2\sqrt{3}xy - 1 = 0$

C. Soit h la fonction numérique définie par $h(x) = \ln\left(x\sqrt{3} + \sqrt{3x^2+1}\right)$.

1) Déterminer le domaine de définition de h.

On remarque que $h(x) = ln[f(x)]$.

2) Etudier la parité de h.
3) Déduire le sens de variation de h de celui de f.
4) Construire la courbe représentative (Γ) de h dans le plan rapporté à un repère orthonormé.
5) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1}. Construire sa courbe représentative (Γ^{-1}) dans le même repère.

Exercice 22 : Bac Niger 1987

Dans tout ce qui suit ln désignera le logarithme népérien. On donne les approximations suivantes : $e \approx 2{,}7$; $\sqrt{2} \approx 1{,}4$. On choisira un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité : 2 cm).

Soit f la fonction numérique de la variable x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2xln(-x) & si\ x < 0 \\ f(x) = x + \sqrt{x^2+x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

Partie A :

1) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 0$.

La fonction f est- elle continue sur ℝ ? Sur quel intervalle de ℝ est elle dérivble ?

b) Montrer l'existence d'une branche parabolique quand $x \longrightarrow -\infty$, pour la courbe représentative de f. Quelle direction a-t-elle ?

2) a) Montrer que la droite d'équation $y - 2x - \frac{1}{2} = 0$, est une asymptote pour la courbe (C).

Quelle est la position de (C) par rapport à cette droite, quand $x \longrightarrow +\infty$?

b) Montrer que, pour $x \geq 0$, (C) ne coupe pas l'asymptote.

3) a) Etudier les variations de f. Montrer l'existence de deux extrema A et B dont on calculera les coordonnées.

b) Calculer $f(-e)$; $f(-1)$; $f\left(-\frac{1}{e}\right)$; $f(0)$; $f(1)$. Etablir un tableau de variation de f

c) Dessiner la courbe (C) dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Reporter les demi-tangentes, puis la tangente à la courbe de direction (Ox).

Déterminer l'équation de la tangente à (C) en $x_0 = 1$.

Partie B :

1) Démontrer que la restriction de f à $[1\ ;\ +\infty[$, admet une bijection réciproque f^{-1}, dont on précisera l'ensemble de définition et l'ensemble image. Ne pas chercher à calculer $f^{-1}(x)$, mais dessiner sa courbe représentative (C^{-1}), dans le même repère que celui de (C).
2) a) Calculer, en cm², l'aire géométrique du domaine (A) limité par les frontières :

$x = -1$; $x = -\frac{1}{e}$; l'axe $(0x)$ et là courbe (C).

On effectuera une intégration par parties. Ne pas chercher à simplifier les résultats obtenus à la fin du calcul.

Exercice 23 : Bac Niger 1988

On donnera les approximations suivantes : $e \approx 2{,}7$; $e^2 \approx 7{,}4$

Partie A :

On considère les fonctions numériques de la variable réelle x, dépendant du paramètre réel m, non nul, définies par :

$$f_m(x) = \frac{e^{2x} + m}{2e^x}$$

1) Etudier les variations de $f_m(x)$, suivant les valeurs de m (on distinguera les cas où $m < 0$ et $m > 0$).
2) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles, on a la relation :

$$\left|\left(f_m'(x)\right)^2 - \left(f_m(x)\right)^2\right| = 1 , \qquad \text{où } f_m'(x) \text{ est la fonction dérivée de } f_m(x)$$

Partie B :

On considère les fonctions numériques définies par :

$$\begin{cases} f_1(x) = \dfrac{e^{2x}+1}{2e^x} & \text{si m} = 1 \\ f_m(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{2e^x} & \text{si m} = -1 \end{cases} \quad \text{de courbe } \mathrm{C}_1 \text{ et } \mathrm{C}_{-1}$$

1) a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$,on a :

$$f_1(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad et \qquad f_{-1}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

b) Vérifier que f_1 et f_{-1}, sont respectivement paire et impaire, et montrer que C_{-1} admet un point d'inflexion.

2) quelle est la position relative de C_1 par rapport à C_{-1} ? Construire C_1 et C_{-1} dans repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Unité : 2 cm. On précisera les branches infinies et $\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) - f_{-1}(x)$

Tracer la tangente à C_{-1} au point d'inflexion.

3) Calculer en cm², l'aire A (ג), du domaine défini par :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq ג \\ f_{-1}(x) \leq y \leq f_1(x) \end{cases} \qquad ג \text{ décrit }]0\,;\,+\infty[$$

Calculer la limite de A (ג), quand ג $\longrightarrow +\infty$,

4) Soit la fonction numérique définie par :

$$x \longrightarrow h(x) = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right|$$

a) Déterminer D_h, l'ensemble de définition de h. Montrer que h est impaire, (on pourra montrer que pour tout $x \in \mathrm{D}_h$; $h(x) = h(-x)$
b) Montrer que $x + \sqrt{x^2 - 1} < 0$ si et seulement si $x \in]-\infty\,;\,-1]$

En déduire l'expression de $h(x)$ sans le symbole de valeur absolue.

5) a) Montrer que la restriction de f_1 à $[0\,;\,+\infty[$, àdmet une bijection réciproque g, définie de $[1\,;\,+\infty[$ dans $[0\,;\,+\infty[$, par $g(x) = h(x)$.

b) Déterminer l'équation de la demi-tangente T à la courbe de g au point A, de coordonnées (1 ; 0). Tracer la demi-tangente T, et la courbe de g dans le même repère que C_1. En déduire le tracé de la courbe de h.

Exercice 24 : Examen blanc

Partie A :

On considère les équations différentielles :(E) : $y'' - 9y = 6e^{-3x}$; (H): $y'' - 9y = 0$

1. Vérifier que la fonction définie par : $g(x) = -xe^{-3x}$ est une solution de (E).
2. Déterminer la solution générale de (H).
3. a) Démontrer qu'une fonction h, deux fois dérivable sur ℝ est solution de (E) si et seulement si $h - g$ est solution de (H).

b) En déduire toutes les solutions de (E).

c) Déterminer la solution h de (E) vérifiant $h(0) = 0$ et $h'(0) = -1$

Partie B :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = (x + 1)e^{-2x} + 1 - x$

1) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2) a) Etudier les variations de la fonction dérivée f' de f

b) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α dans ℝ et que :

$-0{,}64 < \alpha < -0{,}63$

c) En déduire le signe de $f'(x)$

3) a) Etudier les sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

b) Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{-2\alpha^2}{1 + 2\alpha}$ et que $2{,}83 < f(\alpha) < 3{,}16$

c) Justifier que la droite (D) :$y = 1 - x$ est asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$; puis préciser la seconde branche infinie.

d) Tracer la droite (D) avec soin (prendre $\alpha = -0{,}64$.

4) Soit λ un réel strictement supérieur à -1.

a) Calculer l'aire A (λ) du domaine plan limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = \lambda$

b) Calculer la limite de A (λ) lorsque λ tend vers $+\infty$

Exercice 25 :

I. On se propose de déterminer un ensemble de fonctions h définies et dérivables sur ℝ. A cet effet on pose pour tout réel x : $\varphi(x) = h(x) - x - 4$.

Déterminer les fonctions h sachant que les fonctions φ sont les solutions de l'équation différentielle $\varphi' - \varphi = 0$.

II. Soit g la fonction numérique de la variable réelle définie par : $g(x) = e^x - (x + 4)$

1) Etudier les variations de la fonction g.

2) Soit (C) la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
a) Montre que (C) admet une asymptote Δ et préciser la position de (C) par rapport à Δ.
b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution x_0 telle que $\frac{3}{2} < x_0 < 2$.
c) Construire (C) en prenant 2 cm comme unité sur les axes.
3) Calculer l'aire A(α) du domaine limité par (C), Δ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$ avec $\alpha < 0$.

Trouver là limite de A(α) lorsque α tend vers $-\infty$.

4) Soit g_1 la restriction de g à l'intervalle I= [0 ; +∞[
a) Montrer que g_1 admet une fonction réciproque que l'on notera g_1^{-1}.
b) Etudier la continuité et la dérivabilité de g_1^{-1}.
c) Etudier les variations de g_1^{-1}.

III. Soit $f(x) = \ln(x + 4)$, où ln est le symbole du logarithme népérien.
1) Donner le sens de variation de f.
2) Soit $(\mathrm{U_n})$, la suite numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} \mathrm{U_0} = 1 \\ \mathrm{U_{n+1}} = \ln(\mathrm{U_n} + 4) \end{cases}$
a) Etudier le sens de variation de la suite$(\mathrm{U_n})$.
b) Montrer que la suite $(\mathrm{U_n})$ est majorée par 2.
c) En déduire que cette suite est convergente.
3) Soit $(\mathrm{V_n})$, la suite numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} \mathrm{V_0} = 2 \\ \mathrm{V_{n+1}} = \ln(\mathrm{V_n} + 4) \end{cases}$
a) Etudier le sens de variation de la suite$(\mathrm{V_n})$.
b) Montrer que la suite $(\mathrm{V_n})$ est minorée par $\frac{3}{2}$.
c) En déduire que la suite $(\mathrm{V_n})$ est convergente.
4) Montrer que les suites $(\mathrm{V_n})$ et $(\mathrm{U_n})$ ont là même limite.

On prendra $e = 2{,}72$; $\sqrt{e} = 1{,}65$; $\ln 2 = 0{,}69$; $\ln 3 = 1{,}1$; $\ln 11 = 2{,}40$:

Exercice 26 :

On considère la fonction numérique f définie par : $\begin{cases} f(x) = (3 - x)x & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité graphique : 2cm).

Partie A :

1) a) Etudier la continuité de f en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0. Quelle interprétation graphique peut-on tirer ?

c) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

2) a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x - 1$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

Préciser la position relative de (C) par rapport à (Δ) pour $x < 0$.

c) Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) à point d'abscisse 3.
d) Construire la courbe (C), la tangente (T) et là droite (Δ).

Partie B :

1) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty\,;0[$.
a) Montrer que g réalise une bijection de $]-\infty\,;0[$ sur un intervalle que l'on déterminera.
b) Tracer la courbe représentative (Γ) de la réciproque g^{-1} de g dans le même repère que (C). on justifiera la construction.

Sans étudier les variations de h, représenter graphiquement h dans le même repère que (C). On justifiera la construction. On notera (C') la courbe représentative de h.

2) a) On considère le domaine plan (E) délimité par les courbes (C), (C') et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$. Calculer l'aire A de (E) en cm².

b) Déterminer en cm³ le volume du solide engendré par la rotation de (E) autour de l'axe des abscisses.

Exercice 27 :

On considère la fonction numérique f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. (Unité : 5 cm)

Partie A :

Soit la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2+1}$$

1) Etudier les variations de g et dresser sont tableau de variation.
2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$.
3) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B :

1) On pose $k(x) = xf(x)$ pour tout $x \in\,]0;+\infty[$
a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)$
b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2) a)Montrer pour tout $x > 0$, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = x\ln(x^2+1) - 2x\ln x$$

b) Etudier la continuité de f en 0.
c)Etudier la dérivabilité de f en 0 et donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.
3) a) Etudier le sens de variation de f. (On exprimera $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.
b) Dresser le tableau de variation de f.
4) Construire $\mathcal{C}_f$ (on prendra $\alpha = 0{,}55$)
5) Soit λ un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0;1[$.

a) En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale
$J_\lambda = \int_\lambda^1 f(x)dx$

b) Calculer l'aire $A(\lambda)$ du domaine délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 1$.

c) Calculer $\lim_{\lambda \to 0^+} A(\lambda)$.

Exercice 28 :

A. On considère la fonction f définie par : $f(x) = (x+1)e^{-x}$ .C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé$(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. (unité : 2cm).

1) a. Déterminer les limites de f sur son domaine de définition et donner une interprétation graphique du résultat.

b. Dresser le tableau de variation de f.

2) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{4}$ admet deux solutions réelles. On note α et β ces solutions telles que $\alpha < \beta$. Donner une valeur approchée de α et une valeur approchée de β à 10^{-1} près par défaut.

3) Construire C_f.

4) Soit θ un réel positif.

a. A l'aide d'une intégration par partie, calculer l'aire $\mathrm{A}(\theta) = \int_0^\theta f(t)dt$.

b. Déterminer la limite de $\mathrm{A}(\theta)$ en $+\infty$ et faire une interprétation géométrique. (0,5point)

B. Pour tout entier relatif n, on considère la fonction f_n définie par: $f_n = (x+1)e^{-nx}$.

On désignera par C_n sa courbe représentative.

1) Déterminer par le calcule les points d'intersection de C_0 et C_1. Vérifier que pour tout entier relatif n, C_n passe par ces points.

2) a. Montrer que : $\forall\ x \in \mathrm{IR},\ f_{n+1}(x) - f_n(x) = (x+1)e^{-nx}(e^{-x}-1)$.

b. Etudier suivant les valeurs de x, le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. En déduire les positions relatives de C_n et C_{n+1}.

3) On suppose que n est non nul.

a. Calculer $f'_n(x)$ pour tout réel x.

b. En déduire le sens de variation de f_n (distinguer les cas n < 0 et n > 0).

c. Dresser le tableau de variation de f_n sur IR dans chaque cas.

4) a. Démontrer qu'il existe une et une seule valeur de n que l'on déterminera pour laquelle : $f''_n(x) + 2f'_n(x) + f_n(x) = 0$ pour tout réel x. (0,5 point)

b. Tracer la courbe représentative de la fonction g définie par :

$g(x) = f''_1(x) + 2f'_1(x)$.

Exercice 29 :

Partie A

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par :

$f(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$

Où ln désigne le logarithme népérien.

1. a) Montrer que la fonction définie sur l'ensemble des rées IR et qu'elle est impaire.

b) Montrer que f est dérivable sur IR et calculer sa dérivée. En déduire son sens de variation.

2. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

a) Etudier les branches infinies de la courbe (C).

b) Trouver une équation cartésienne de la tangente D à (C) à l'origine du repère.

c) Tracer la courbe (C).

Partie B

1. a) Montrer que la fonction réciproque g définie sur un domaine I que l'on déterminera.

b) Construire dans le même repère la courbe (C') représentative de la fonction g.

c)Montrer que, pour tout x de I, on a : $g(x) = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})$.

2. Montrer que l'équation g(x)=x admet une solution dans $]0; +\infty[$ une et une seule solution α et que $\alpha > \frac{\sqrt{3}}{2}$ (on pourra montrer que cette équation est équivalente à $f(x) = x$ et étudier les variations de la fonction p définie par $p(x) = f(x) - x$).

Partie C

On note $g'(x)$ la dérivée de g et on considère la fonction φ définie sur IR par : $\varphi(x) = \frac{g(x)}{g'(x)}$

1. Montrer que φ est une bijection de IR sur un intervalle J que l'on déterminera.
2. On pose $h = \varphi^{-1}$ la fonction réciproque de φ. Donner les expression de $h(x)$ et $h'(x)$.

Exercice 30 :

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (L'unité graphique est 2cm). Le but du problème est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$f(x) = x - 1 + \frac{2}{x} - \frac{2\ln(x)}{x}$ puis de calculer une aire.

A) On note g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par: $g(x) = x^2 - 4 + 2ln(x)$.

1. Calculer la fonction dérivée g' de la fonction g.
2. Déterminer le sens de variation de g. (On ne demande pas les limites)
3. Résolution de l'équation $g(x) = 0$.

a) Démontrer sur l'intervalle $[1; 2]$ l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α.
b) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de ce nombre α.

4. Déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x, dans l'intervalle $]0; +\infty[$.

B) Etude de la fonction f. Soit C la courbe représentative de f dans le repère .

1. Déterminer la limite de f en 0. Qu'en déduit-on pour la courbe C ?
2. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Démontrer que la droite D d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe C
c) Déterminer les coordonnées du point A commun à la courbe C et à la droite D.
d) Etudier la position de la courbe C par rapport à la droite D.
e) Etudes des variations de f.

3. Déterminer la dérivée f' de la fonction f. Vérifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, où g est la fonction étudiée dans la partie A).
4. En utilisant les résultats de la partie A), dresser le tableau des variations de f.

a. On note T la tangente la courbe C au point d'abscisse e^2.
Montrer que T est parallèle à l'asymptote D.
b. Tracer la droite D, la tangente T et la courbe C. (Prendre $f(\alpha) \approx 1,25$).

C) On définit sur l'intervalle $]0; +\infty[$ la fonction H par :

$$H(x) = \frac{x^2}{2} - x + 2\ln(x) - (\ln x)^2$$

1. Démontrer que H est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
2. Soit la région du plan limité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

a) Hachurer la région sur votre figure.
b) Soit S l'aire en unité d'aire, de cette région. Déterminer la valeur exacte de S.
c) Donner une valeur décimale approchée de cette aire, arrondie au mm^2.