RENFORCEMENT **TS1** 2019-2020

Equations différentielles linéaires

EXERCICE : 1

Dans chacun des cas suivants, résoudre sur R l'équation différentielle (E) et déterminer la solution vérifiant la condition initiale donnée.

$a.)\,(E): y'-3y=0 \quad et \;\; y(0)=2$

$b.)\,(E): 3y'+y=0 \quad et \;\; y(1)=e$

$c.)\,(E): y'+y\ln 2=0 \quad et \;\; y(1)=1$

$d.)\,(E): y'=y \quad et \;\; y(1)=-1$

EXERCICE : 2

Dans chacun des cas suivants, résoudre sur R l'équation différentielle (E) et déterminer la solution vérifiant les conditions initiales données.

$a.)\,(E): y''+2y'+y=0, \;\; y(0)=-1 \; et \; y'(0)=0$

$b.)\,(E): y''+16y=0, \qquad y(0)=0 \; et \; y'(0)=-1$

$c.)\,(E): y''-(\ln 2)^2=0, \;\; y(0)=1 \; et \; y(2)=1$

$d.)\,(E): 4y''+y=0, \qquad y(\frac{\pi}{3})=1 \; et \; y(\frac{\pi}{2})=1$

$e.)\,(E): y''+2y'-3y=0, \;\; y(0)=3 \; et \; y'(0)=-1$

$f.)\,(E): y''+y'+y=0, \quad y(0)=-1 \; et \; y(0)=\sqrt{3}$

EXERCICE : 3

On considère l'équation différentielle (E) : $y'+2y=e^{-2x}$.

1. Vérifier que la fonction $g: x \to (x+1)e^{-2x}$ est solution sur R de (E).
2. Démontrer qu'une fonction $f+g$ est solution de l'équation de (E) si et seulement si la fonction f est solution de l'équation différentielle : $y'+2y=0$.
3. En déduire les solutions sur R de (E).

EXERCICE : 4 Soit la fonction $f: x \to (x+1)e^{-2x}$.

1. Déterminer les nombres réels a et b pour que f soit solution sur R de l'équation différentielle
(E) $y''+ay'+by=0$.

2. Démontrer pour tout entier naturel n non nul, la dérivée d'ordre n de n de f est solution de (E).

3. Déterminer parmi les solutions de f, celle qui est solution de (E).

EXERCICE :5

Soit θ un nombre réel tel que $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$.

a. Résoudre dans C , l'équation :
$z^2\cos^2\theta - 2z\sin\theta\cos\theta + 1=0.$

Déterminer le module et un argument des solutions éventuelles de cette équation.

b. Résoudre l'équation différentielle :
$(1+\cos 2\theta)y''-2\sin 2\theta y'+2y=0$.

EXERCICE : 6

Soit α un nombre réel tel que : $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$

.Résoudre sur R l'équation différentielle :
$(1+\cos 2\alpha)y''-2y'\sin 2\alpha+2y=0$.

EXERCICE : 7

1. Résoudre sur R l'équation différentielle (E)
$y''+16y=0$

2. Déterminer la solution f qui vérifie : $f(\frac{\pi}{4})=-2$ et $f'(\pi)=8$.

3. Résoudre dans $[0;\pi]$ l'équation $f(x)=\sqrt{2}$.

EXERCICE : 8

1. Résoudre sur R l'équation différentielle (E)
$y''+2y'+5y=0$.
2. Déterminer la solution f qui vérifie : f(0)=1 et f'(0)=-1
3. On pose : $F(x)=-\frac{1}{5}\left[f'(x)+2f(x)\right]$
   a. Démontrer que F est une primitive de f sur R ; expliciter $F(x)$.
   b. En déduire le calcul de
   $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

EXERCICE : 9

Soit l'équation différentielle (E) $y'+3y=10\cos x$..

a. Résoudre l'équation différentielle (F) :
$y'+3y=0$

b. Déterminer les nombres réels $\alpha \; et \; \beta$ tels que la fonction g définie par :
$g(x)=\alpha\cos x+\beta\sin x$ soit une solution de l'équation (E)

c. Démontrer qu'une fonction f est une solution de (E) si et seulement si $f - g$ est une solution de (F).

d. En déduire les solutions de l'équation différentielle de (E).

EXERCICE : 10

Dans cet exercice, on cherche à calculer l'intégrale

$I= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}[\sin(2x) + e^{-x}\cos(x - \frac{\pi}{4})]dx$

à l'aide d'une équation différentielle :

1. Résoudre l'équation différentielle : $y''+2y'+2y = 0 \quad (E_1)$
2. On considère l'équation différentielle $y''+2y'+2y = 4\cos(2x) - 2\sin(2x) \quad (E)$

a. Déterminer deux réels a et b pour que la fonction f_1 définie par : $\forall x \in R$
$f_1(x) = a\sin(2x) + b\cos(2x)$ soit solution de l'équation (E) .
f désignant une numérique, on désigne par g la fonction $f - f_1$.
b.Démonter que f est solution de (E) si et seulement si g est solution de (E_1) .
En déduire la forme générale des fonctions vérifiant l'équation (E).

Vérifier que la fonction f de (E) telle que $f(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
et $f'(0) = 2$ et
$f(x) = \sin(2x) + e^{-x}\cos(x - \frac{\pi}{4})$

Utiliser (E) pour trouver l'ensemble des primitives F de f.

3. En déduire la valeur de l'intégrale I.

EXERCICE : 11

1) Déterminer l'ensemble des solutions définies sur R de l'équation différentielle : $y'' + y = 0$ (1).
2) Etant donné une fonction numérique de variable réelle x , g deux fois dérivable sur $\forall x \in R^*$; $f(x) = xg(\frac{1}{x})$.
Exprimer $f''(x)$ à l'aide de $g''\left(\frac{1}{x}\right)$ et de x.
3) On considère l'équation différentielle.
$y'' = -\frac{1}{x^4}y$ (2)
a) Démontrer que la fonction g deux fois dérivable sur R^* est solution de (2) si et seulement si la fonction f définie par : $\forall x \in R^*$; $f(x) = xg(\frac{1}{x})$ est solution de (1).
b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation de (2) définies sur chacun des intervalles et $]0, +\infty[$.
4) Soit g une solution de l'équation (2) définie sur $]0, +\infty[$. Déduire de ce qui précède une primitive de la fonction :
$x \longmapsto \frac{1}{x^4}g(x)$.

PROBLEME : 1

A) Soit (E) l'équation différentielle du second ordre :
$y'' - 3y' + 2y = 0$ (E).

1. a) Quelles sont les solutions de (E) ?

b) Quelle est la solution de (E) dont la courbe représentative (C) admet au point d'abscisse $x = 0$ la même tangente que la courbe (C') représentative de $y = e^{3x}$? On dit que (C) et (C') sont tangentes .
2. Représenter , dans un même repère orthonormé les courbes (C) et (C') dont on précisera les positions relatives .
3. λ étant un réel strictement positif , soit h_λ les fonctions telles que :
$h_\lambda(x) = -\lambda^2e^x + 2\lambda e^{2x}$.

a. Montrer que h_λ est solution de (E).
b. Soit C_λ la courbe représentative de h_λ. Après avoir calculé ,en fonction de λ les coordonnées du point commun à des courbes C_λ et (C'),
montrer que ces courbes sont tangentes en ce point .
c. Préciser les positions relatives de C_λ et (C'.

B) Soit (E') l'équation différentielle : $y'' - 3y' + 2y = -x^2 + x + 2$ (E')

1. Trouver un polynôme P du second degré solution de l'équation (E').
2. On pose $f(x) = g(x) - \frac{1}{2}x^2 - x$.

Montrer que f est solution de (E') si et seulement si g est solution de (E). En déduire les fonctions f solutions de (E').

3. Déterminer la solution de (E')

dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées (0 , 2) et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 1.

PROBLEME : 2

Partie A

1. (E_0) désigne l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = 0$. .
Déterminer les solutions générales de (E_0).
2. (E) est l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$
   a. Vérifier que la fonction h définie sur R par $h(x) = x^2e^{-x}$ est solution de (E).

b. Démontrer que φ est une solution de (E) si et seulement si $g = \varphi - h$ est solution de (E_0).

c. Déterminer toutes les solutions de (E).

d. Déterminer la solution f_0 de (E) satisfaisant aux conditions initiales $f_0(0) = 4$ et $f'_0(0)=0$.

Partie B

On considère la fonction f définie par : $f(x)= (x+2)^2e^{-x}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'unité graphique étant 1 cm)

1. Etudier les variations de f et tracer (C) avec soin.
2. En remarquant que f est une solution de l'équation différentielle (E), déterminer une primitive F de f sur R.

(On calculera $\int_0^x (f'' + 2f' + f)(t)dt$)

3. Pour tout entier naturel n , on pose : $I_n=\int_0^n f(t)dt$.
   a. Exprimer I_n en fonction de n et interpréter graphiquement.
   b. Etudier la convergence de la suite (I_n), puis en déduire l'aire de l'ensemble des points M(x,y) du plan tels que $x\leq 0$ et $0\leq y \leq f(x)$.

Partie C

On se propose d'étudier la convergence de la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul par

1. Vérifier que pour tout entier naturel n non nul , on a $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = u_n + \frac{4e-9}{ne}$
2. Etablir que , pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel k tel que $0\leq k \leq n-1$, on a : $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$
3. Démontrer que , pour tout entier naturel non nul n , on a : $u_n \leq \int_0^1 f(t)dt \leq u_n + \frac{4e-9}{ne}$.
4. En déduire pour tout entier naturel n non nul on a : $I_1 - \frac{4e-9}{ne} \leq u_n \leq I_1$.
5. Déterminer la convergence de la suite u_n , puis préciser sa limite .

<u>**PROBLEME : 3**</u> Partie : I On donne un entier naturel n strictement positif et on considère l'équation différentielle $(E_n) : y'+y = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$;

1) On fait l'hypothèse que deux fonctions f et g définies et dérivables sur R, vérifient pour tout réel x : $g(x) = h(x)e^{-x}$.
   a) Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si, pour tout réel x $h'(x) = \frac{x^n}{n!}$.
   b) En déduire la fonction h associée à une solution de g de (E_n) ,sachant que h(0)=0.Quelle est alors la fonction g ?
2) Soit φ une fonction dérivable sur R.
   a) Montrer que φ est solution de (E_n) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de (F) : $y' + y = 0$.
   b) Résoudre (F).
   c) Déterminer la solution générale de l'équation (E_n) .
   d) Déterminer la solution f de l'équation (E_n) vérifiant f(0)=0

Partie II : On pose pour tout réel x, $f_0(x) = e^{-x}$ et $f_1(x) = xe^{-x}$.

1) a)Vérifier que f_1 est solution de l'équation différentielle $y'+y = f_0$.
   b) Pour tout entier n strictement positif on définit la fonction f_n comme solution de l'équation différentielle $y'+y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$.
   En utilisant la partie I, montrer par récurrence que pour tout réel x et tout entier naturel $n \geq 1$: $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$.
2) Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$;
   a) Montrer que pour tout entier naturel n et pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$ $0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^n}{n!}$.
   b) En déduire que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{(n+1)!}$, puis déterminer la limite de la suite (I_n) .

c) Montrer pour tout entier naturel k non nul, l'égalité : $I_k - I_{k-1} = \frac{1}{k!}e^{-1}$;

d) Calculer I_0 et en déduire que :

$$I_n = 1 - \frac{1}{e}\sum_{k=}^{n}\frac{1}{n!}$$

e) En déduire que $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=}^{n} \frac{1}{k!} = e$

PROBLEME : 4

1. Soit l'équation différentielle :
(E_m) : $my'' + 2y' + 2y = 0$; où m est un réel.
a. Déterminer suivant les valeurs de m, l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur R solutions de l'équation (E_m).
b. Déterminer la solution (E_1) dont la courbe représentative passe par le point A de coordonnées (0,1) et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation : $y = -x$.
2. Soit f(t) la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ par $f(t) = e^{-t}\cos t$. Etudier les variations de f et construire sa courbe représentative dans un repère orthogonal d'unités (2cm sur l'axe des abscisses et 10cm sur l'axe des ordonnées).
3. Soit g le prolongement à R de f.
   a. Comparer (t) et $g(t + 2\pi)$. Donner alors le sens de variation de g .
   b. On pose $u(t) = e^{-t}$ et $v(t) = -e^{-t}$. On note (C_u) et (C_v) leurs courbes représentatives respectives et (G) celle de g dans le même repère. Quels sont les points communs à (G) et (C_u) d'une part et à (G) et (C_v) d'autre part ?
   c. Montrer qu'en chacun de ses points les deux courbes ont même tangente.
   d. Démontrer que g admet une limite en $+\infty$. On fait remarquer que $-1 \leq \cos t \leq 1$
4. Pour tout réel k on pose : $a_k = \int_{-\frac{\pi}{2}+k\pi}^{\frac{\pi}{2}+k\pi} g(t)dt$.
   a. Calculer a_k (on pourra faire deux fois une intégration par parties).
   b. Pour tout entier n, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$.
   Monter que la suite (S_n) admet une limite. Interpréter géométriquement ce résultat.
5. Dans cette question, le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère la courbe (Λ) définie par le système d'équations.
$\begin{cases} x(t) = e^{-t}\cos t \\ y(t) = e^{-t}\sin t \end{cases}$; pour $\in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.
a. Etudier les variations de x et y et dresser le tableau de variations conjointes.
b. Soit M_t le point de (Λ) de paramètre t et $\vec{V_t}$ le vecteur dérivé lui correspondant.
Calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{OM_t}$ et monter que l'angle $(\overrightarrow{OM_t}; \vec{V_t})$ est constant.
c. Représenter graphiquement (Λ). On précisera les tangentes aux points de paramètre $-\frac{\pi}{2}$ et