SECONDAIRE
Tle A
MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

THÈME : FONCTIONS NUMERIQUES

Durée : 28 heures **Code :**

Leçon 1 : ÉTUDE DE FONCTIONS POLYNÔMES ET DE FONCTIONS RATIONNELLES

A-SITUATION D'APPRENTISSAGE

En vue de diversifier ses activités et mobiliser des ressources financières, le comité de gestion scolaire (COGES) d'un lycée a créé une imprimerie. Celle-ci fabrique et vend chaque jour un nombre **x** d'articles. Le coût de production unitaire **C(x)** exprime le coût de production par article produit et vendu et est défini par la fonction **C telle que :**

C(*x*)= $\boldsymbol{x - 10 + \frac{900}{x}}$.

Le bénéfice global de l'imprimerie est modélisé par la fonction **B telle que :**

B(*x*)= $\boldsymbol{-x^2 + 110x - 900}$.

Le président du COGES souhaite déterminer le nombre d'articles que l'on doit fabriquer et vendre pour avoir un bénéfice maximal mais il ne sait comment s'y prendre . Ta classe est informée du problème et décide de l'aider.

B-CONTENU DE LA LEÇON

I-FONCTION POLYNÔME

1- Limite d'une fonction polynôme en un point

Activité

Soit f la fonction définie de ℝ vers ℝ par : $f(x) = \frac{x^2-x}{2x-2}$

1-Détermine l'ensemble de définition D_f de la fonction f
2-Complète à l'aide d'une calculatrice le tableau ci-dessous.

x	0,9	0,99	0,999	0,9999	1	1,0001	1,001	1,01	1,1
$f(x)$									

3) De quelle valeur se rapproche $f(x)$ lorsque x prend dans D_f , des valeurs suffisamment proches de 1?

REPONSES ATTENDUES

1) $D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

2)

x	0,9	0,99	0,999	0,9999	1	1,0001	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	0,45	0,495	0,4995	0,49995	$\times$	0,50005	0,5005	0,505	0,55

3) $f(x)$ se rapproche du nombre 0,5 lorsque x prend dans D_f, des valeurs suffisamment proches de 1.

<u>CONCLUSION</u>

On dit que 0,5 est la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 1 ou que 0,5 est la limite de f en 1.

Et on note : $\boldsymbol{\lim_{x\to 1} f(x) = 0,5}$

On admet les propriétés 1 et 2 suivantes :

<u>Propriété 1</u>

Lorsqu'une fonction admet une limite en un point ou à l'infini, cette limite est unique.

<u>Propriété 2</u>

-La limite d'une fonction polynôme $\boldsymbol{P}$ en un point $\boldsymbol{a}$ est égale à l'image de $\boldsymbol{a}$ par $\boldsymbol{P}$.

On a alors :$\boldsymbol{\lim_{x\to a} P(x) = P(a)}$

-En particulier, la limite d'une **constante** $\boldsymbol{k}$ en un réel $\boldsymbol{a}$ est **la constante** $\boldsymbol{k}$.

On a alors :$\boldsymbol{\lim_{x\to a} k = k}$**.**

Exercices de fixation

Exercice 1

Réponds par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

f est une fonction qui admet une limite en a ($a \in \mathbb{R}$),

1) la limite de f en a peut prendre deux valeurs différentes……..

2) la limite de f en a ne peut prendre qu'une seule valeur……

Solution

Exercice 1

1°) faux ; 2) vrai

Exercice 2

Complète les égalités suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 4}(2x+1) = \ldots\ldots\ldots\ldots$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)(3x+8) = \ldots\ldots\ldots\ldots$; 3) $\lim\limits_{x\to -1}(-13)$

Solution

Exercice 2

1) $\lim\limits_{x\to 4}(2x+1) = 9$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)(3x+8) = \mathbf{0}$; 3) $\lim\limits_{x\to -1}(-13) = \mathbf{-13}$

<u>Exercice de maison</u>

Détermine la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 4}(-2x+10x^3)$

2- Limite d'une fonction polynôme à l'infini

<u>ACTIVITE</u>

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 2$

1) Complète à l'aide d'une calculatrice le tableau ci-dessous

x	40	40×10^3	40×10^5	40×10^8
$f(x)$				

2) Que deviennent les images $f(x)$ lorsque x prend des valeurs aussi grandes que l'on veut ?

<u>REPONSES ATTENDUES</u>

x	40	40×10^3	40×10^5	40×10^8
$f(x)$	1602	40002	4000002	4000000002

2) Les valeurs de $f(x)$ deviennent aussi grandes que l'on veut lorsque x prend des valeurs de plus grandes.

<u>CONCLUSION</u>

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou que $+\infty$ est la limite de f en $+\infty$

Et on note : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

On admet les propriétés 1 et 2 suivantes :

<u>Propriété1</u>

*k est un nombre réel, a est un nombre réel non nul et n un nombre entier naturel.on a :

$\lim\limits_{x\to +\infty} k = k$; $\lim\limits_{x\to -\infty} k = k$

***Cas n est pair**

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} ax^n = +\infty \; si \; a > 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} ax^n = -\infty \; si \; a < 0 \end{cases} ; \begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} ax^n = +\infty \; si \; a > 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} ax^n = -\infty \; si \; a < 0 \end{cases}$$

***Cas n est impair**

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} ax^n = +\infty \; si \; a > 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} ax^n = -\infty \; si \; a < 0 \end{cases} ; \begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} ax^n = -\infty \; si \; a > 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} ax^n = +\infty \; si \; a < 0 \end{cases}$$

Propriété 2

La limite d'une fonction polynôme à l'infini est la limite de son monôme de plus haut degré

Exercices de fixation 1

Réponds par vrai ou par faux aux affirmations suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-3x^3) = -\infty$; 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} -4x^2 = +\infty$; 3) $\lim\limits_{x \to -\infty} -x^3 = -\infty$; 4) $\lim\limits_{x \to -\infty} -x = -\infty$.

Solution

Exercice 1

1) V ;2) F ; 3) F ; 4) F

Exercice de fixation 2

Détermine les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} -3x^3 + 2x$; 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} -3x^2 + 10$

Solution

Exercice 2

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-3x^3 + 2x) = \lim\limits_{x \to -\infty} -3x^3 = +\infty$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-3x^2 + 10) = \lim\limits_{x \to +\infty} -3x^2 = -\infty$

Exercice de maison

Détermine les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} -3x^3 + 2x + x^5$; 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x - 100$

II- FONCTION RATIONNELLE

1-Limite d'une fonction rationnelle

1-1 -Limite d'une fonction rationnelle en un nombre où elle est définie.

Propriété **(admise)**

Soit f une fraction rationnelle et a un élément de l'ensemble de définition de f.

On a : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

EXERCICE DE FIXATION

Détermine les limites suivantes

1) $\lim_{x \to 1} \frac{x}{x+2}$; 2) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2}{x-2}$

REPONSES ATTENDUES

1) $\lim_{x \to 1} \frac{x}{x+2} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$ 2) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2}{x-2} = \frac{(-1)^2}{(-1)-2} = -\frac{1}{3}$

1-2 -Limite d'une fonction rationnelle en un nombre où elle n'est pas définie.

a)-Limite à gauche en a et à droite en a de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x-a}$

ACTIVITE

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{x-1}$

1-Détermine l'ensemble de définition D_f de la fonction f
2-Complète à l'aide d'une calculatrice le tableau ci-dessous.

x	0,9	0,99	0,999	0,9999	1	1,0001	1,001	1,01	1,1
$f(x)$									

3-Que deviennent les images f(x) lorsque x prend dans D_f des valeurs suffisamment proches de 1

a) Lorsque $x < 1$ b) Lorsque $x > 1$

REPONSES ATTENDUES

1-$D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ **2-**

x	0,9	0,99	0,999	0,0009	1	1,0001	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	-10	-100	-1000	-10000		10000	1000	100	10

3)a – Lorsque $x < 1$ et que x est proche de 1, $f(x)$ devient négative et de distance à zéro de plus en plus grande.

b-Lorsque $x > 1$ et que x est proche de 1, $f(x)$ devient de plus en plus grande.

<u>CONCLUSION</u>

Lorsque $x < 1$ et que x est proche de 1 , $f(x)$ tend vers $-\infty$,

On dit que $-\infty$ est la limite de $f(x)$ **lorsque x tend vers 1 à gauche en 1**.

On note : $\boldsymbol{\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x)} = -\infty$

Lorsque $x > 1$ et que x est proche de 1 , $f(x)$ tend vers $+\infty$,

On dit que$+\infty$ est la limite de $f(x)$ **lorsque x tend vers 1 à droite en 1**.

On note : $\boldsymbol{\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)} = -\infty$

On admet la propriété suivante :

<u>Propriété</u>
Soit a un nombre réel. On a :
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \frac{1}{x-a} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \frac{1}{x-a} = +\infty$

Exercices de fixation

Exercice 1

Réponds par vrai ou par faux aux affirmations suivantes

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{1}{x-3} = -\infty$ …………… b) $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ <}} \frac{1}{x-4} = +\infty$……………… ; c) $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ >}} \frac{1}{x-5} = -\infty$

<u>Solution</u>
a) V, b) F, c) F

Exercice 2

Détermine les limites suivantes

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 7 \\ >}} \frac{1}{x-7}$ b) $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{1}{x+2}$

<u>Solution</u>

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 7 \\ >}} \frac{1}{x-7} = +\infty$ b) $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{1}{x+2} = -\infty$

EXERCICE DE MAISON Détermine les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3}{x-2}$ 2) $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ <}} \frac{1}{x-5}$ 3) $\lim\limits_{\substack{x \to -4 \\ <}} \frac{1}{x+4}$

b) Limite à l'infini d'une fonction rationnelle

Propriété (admise)

La limite à l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient des monômes de plus hauts degrés.

Exercices de fixation

Détermine $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{7x^3 - x^2 + 5}{4x^2 - 2x + 3}$

Solution

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{7x^3 - x^2 + 5}{4x^2 - 2x + 3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{7x^3}{4x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{7x}{4} = -\infty$$

Exercices de maison

Détermine les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{7x^3 - x^2 + 5}{4x^2 - 2x + 3}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{7x^3 - x^2 + 5}{4x^3 - 2x + 3}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{17x^2 - x^2 + 5}{4x^3 - 2x + 3}$

III- Opération sur les limites

1- limite d'une somme de fonctions

a désigne un nombre réel, ou $+\infty$ ou$-\infty$, l et l' sont des nombres réels.

Propriété

Si : $\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	$\boldsymbol{l}$	$\boldsymbol{l}$	$\boldsymbol{l}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si : $\lim\limits_{x \to a} g(x) =$	$\boldsymbol{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to a}[f(x) + g(x)]} =$	$\boldsymbol{l + l'}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**on ne peut conclure**

Exercices de fixation

Exercice 1

l est un nombre réel. On donne : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$

Réponds par vrai ou par faux aux affirmations suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [g(x) + h(x)] = 0$, b) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) + h(x)] = l$,c) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) + h(x)] = -\infty$

Solution

a) F , b) F , c) V

Exercice 2

Détermine dans chaque cas les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to -2}[\frac{2x+3}{x+1} + x - 8]$

b) $\lim_{x\to +\infty}[x^2 + 2x + 5 + \frac{1}{x}]$

Solution

a) $\lim_{x\to -2}[\frac{2x+3}{x+1} + x - 8] = -9$ car $\boldsymbol{\lim_{x\to -2} \frac{2x+3}{x+1} = 1}$ **et** $\boldsymbol{\lim_{x\to -2} x - 8 = -10}$

b) $\lim_{x\to +\infty}[x^2 + 2x + 5 + \frac{1}{x}] = +\infty$

car $\boldsymbol{\lim_{x\to +\infty} x^2 + 2x + 5 = \lim_{x\to +\infty} x^2 = +\infty}$ **et** $\boldsymbol{\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0}$

2) Limite d'un produit de fonctions

On admet les propriétés suivantes :

Propriété

Si : $\lim_{x\to a} f(x) =$	l	$l > 0$	$l < 0$	$l > 0$	$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
et si : $\lim_{x\to a} g(x) =$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$
alors $\lim_{x\to a}[f(x) \times g(x)] =$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	on ne peut conclure

Exercices de fixation

Exercice1

l est un nombre réel. On donne : $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} h(x) = l$

Répond par vrai ou par faux aux affirmations suivantes

a) On ne peut conclure pour la limite de $f \times g$

b) On ne peut conclure pour la limite de $f \times h$

c) $\lim_{x\to +\infty}[f(x) \times h(x)] = 0$

d) $\lim_{x\to +\infty}[g(x) \times h(x)]$ est toujours égale à $+\infty$

Solution

1) a) V b) F c) V d) F

Exercice2

Détermine $\lim_{x\to+\infty}[\frac{x+6}{x-4} \times (6-x)]$

Solution

$\lim_{x\to+\infty}[\frac{x+6}{x-4} \times (6-x)] = -\infty$ car $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+6}{x-4} = 1$ et $\lim_{x\to+\infty}(6-x) = -\infty$

<u>Exercice de maison</u>

Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x) \times g(x)$ sachant que $f(x) = \frac{x^2+6}{x-4}$ et $f(x) = \frac{-x^3+6x+4}{x+2}$

3) Limite d'un inverse d'une fonction

<u>Propriété</u>

Si $\lim_{x\to a} g(x) =$	l avec $l \neq 0$	$-\infty$	$+\infty$	0 avec $g(x) > 0$	0 avec $g(x) < 0$
alors $\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)} =$	$\frac{1}{l}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

4) Limite de quotients

<u>Méthode pour calculer</u> $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ avec $g(a) = 0$ et $f(a) \neq 0$

Pour calculer $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, on peut procéder comme suit :

On écrit d'abord $\lim_{x\to a} f(x) \times \frac{1}{g(x)}$

On calcule $\lim_{x\to a} f(x)$, puis $\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}$

On en déduis alors la valeur de $\lim_{x\to a} f(x) \times \frac{1}{g(x)}$ qui est égale à $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$

<u>Exercices de fixation</u>

<u>Exercice 1</u>

l est un nombre réel. On donne : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} h(x) = l$ avec $l \neq 0$

Réponds par vrai ou par faux aux affirmations suivantes :

a) On ne peut conclure pour la limite de $\frac{g}{f}$,

b) On ne peut conclure pour la limite de $\frac{f}{g}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{g(x)}=0$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{h(x)}$ est toujours égale à $+\infty$

<u>Solution</u>

1) a) V b) F c) V d) F

<u>Exercice 2</u>

Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 6\\ >}}\frac{x-8}{x-6}$ sachant que $f(x)=x-8$ et $h(x)=x-6$

<u>Solution</u>

$$\lim_{\substack{x\to 6\\ >}}\frac{x-8}{x-6}=\lim_{\substack{x\to 6\\ >}}(x-8)\times\frac{1}{x-6}$$

$$=-\infty \qquad \text{Car } \lim_{\substack{x\to 6\\ >}} f(x)=-2 \text{ et } \lim_{\substack{x\to 6\\ >}}\frac{1}{g(x)}=+\infty$$

<u>Exercice de maison</u>

Calcule les limites suivantes : $\lim\limits_{\substack{x\to -4\\ >}}\frac{x^2+6x-10}{x+4}$

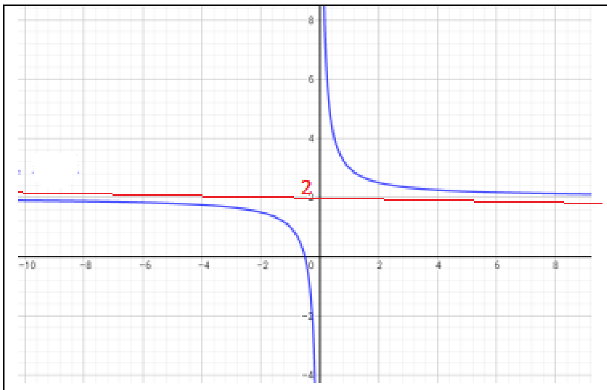
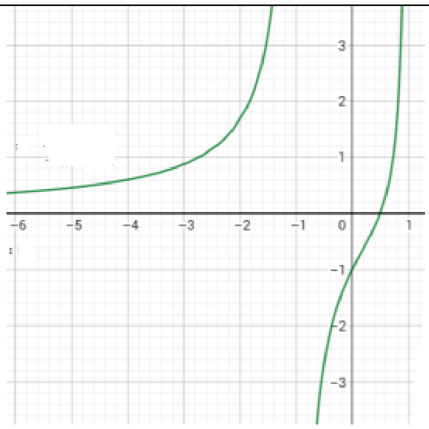
4-Asymptote verticale, horizontale, oblique

a) <u>Asymptote parallèle à la droite des abscisse ou asymptote horizontale</u>

<u>Définition</u>

Lorsque la fonction f admet une limite finie b en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$),on dit que la représentation graphique de la fonction f admet une asymptote horizontale en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$), la droite d'équation $y=b$

Illustration graphique

	
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$ La droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale en$+\infty$ et en $-\infty$	$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale en $-\infty$

Exercice de fixation

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{3x-2}{x-1}$.On admet que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$.

Réponds par vrai ou par faux aux affirmations suivantes

1) La représentation graphique de la fonction f n'admet d'asymptote horizontale en $+\infty$.

2) La représentation graphique de la fonction f admet une asymptote horizontale en $+\infty$:

La droite d'équation $y = 3$.

3) La représentation graphique de la fonction f n'admet d'asymptote horizontale en $+\infty$: $x = 1$

Solution

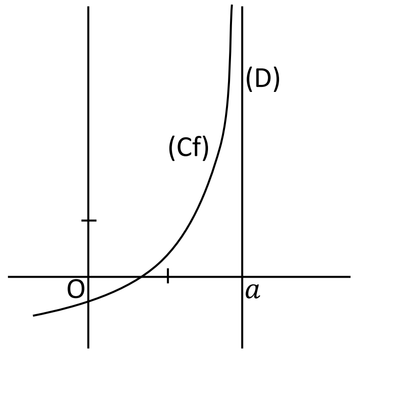
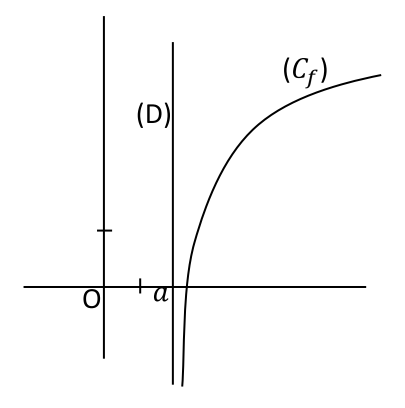
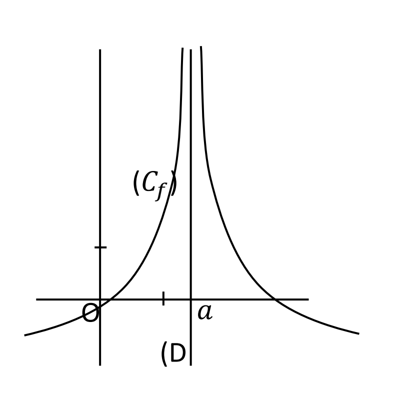
1. F ; 2 . V ;3 F

b) Asymptote parallèle à la droite des ordonnées ou asymptote verticale

Définition

Lorsque la fonction f admet une limite infinie ($-\infty$ ou $+\infty$) en a ,on dit que la représentation graphique de la fonction f admet une asymptote verticale en a : la droite d'équation $x = a$

Illustration graphique

		
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = +\infty$ La droite (D) d'équation $x = a$ est asymptote à (C_f)	$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = -\infty$ La droite (D) d'équation $x = a$ est asymptote à (C_f)	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ La droite (D) d'équation $x = a$ est asymptote à (C_f)

Exercice de fixation

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{3x-4}{x-5}$ et (C_f)sa courbe représentative.

On admet que $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ >}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ <}} f(x) = -\infty$

Réponds par vrai ou par faux aux affirmations suivantes :

1) La représentation graphique de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x = 5$.

2) La représentation graphique de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $y = 3$.

3) La représentation graphique de la fonction f n'admet pas d'asymptote verticale.

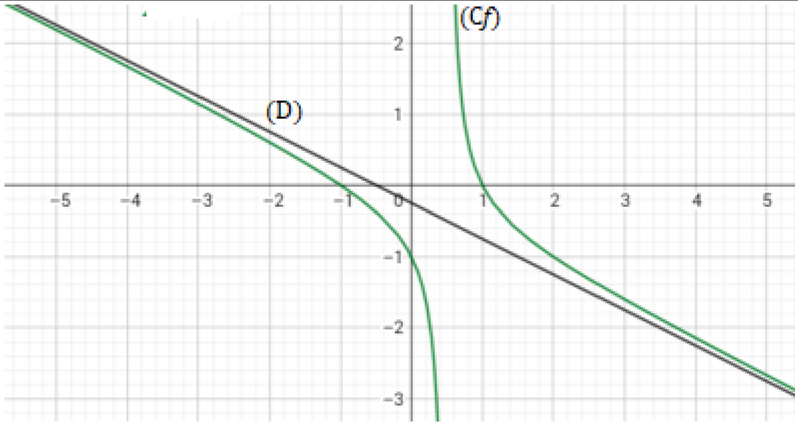
Solution

1. V ; 2 . F ;3 F

c) Asymptote oblique

On admet la propriété suivante :

La droite d'équation $y = ax + b$ (avec $a \neq 0$) est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$),si et seulement si $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ (respectivement $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$)



La droite (D) d'équation : $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est asymptote oblique à (C_f) en $-\infty$ et en$+\infty$.

Exercice de fixation

On considere la fonction f definie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par :$f(x) = \frac{2x^2+3x-1}{x+2}$ et (C_f) sa courbe representative.

Justifie que la droite (D) d'equation $y = 2x - 1$ est asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$ et en $-\infty$.

Solution

On sait que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}, f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x+2}$.

Calculons

$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (2x - 1)] = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+2} = 0$.

De même $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (2x - 1)] = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x+2} = 0$

Donc la droite (D) est asymptote à (C_f) en $+\infty$ et en $-\infty$

Exercice de maison

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x - 8 + \frac{1}{x-3}$

1) Calcule $\lim_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x)$ puis interpréter les résultats.
2) a)Justifie $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x - 8)] = 0$

   b) Déduis-en que la droite (D) d'équation $y = x - 8$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.
3) Justifier que la droite (D) d'équation $y = x - 8$ est asymptote oblique à la courbe de f en -∞.

IV- DERIVATION

1) Dérivée de fonctions élémentaires

Propriété

Fonction f	Ensemble de définition f	Dérivée f'	Ensemble de définition f'
$f(x) = a$ avec $a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax$ avec $a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$, avec n entier et $n \geq 1$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ n entier et $n \geq 1$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Exercice de fixation

Calcule la fonction dérivée sur $\mathbb{R}$ des fonctions f, g, h, k, l, m et k suivantes :

$f(x) = -6$, $g(x) = 8x$, $h(x) = x^2$, $l(x) = x^3$, $m(x) = \frac{1}{x}$, $k(x) = \frac{1}{x^3}$

Solution

$f'(x) = 0$, $g'(x) = 8$, $h'(x) = 2x$, $l'(x) = 3x^2$, $m'(x) = \frac{-1}{x^2}$, $k'(x) = \frac{-3}{x^4}$

2) Dérivées et opérations sur les fonctions

Propriété

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I et n un entier naturel non nul.

On a :

$u + v$ est dérivable sur I et	$(u+v)' = u' + v'$
kv est dérivable sur I avec k une constante réel et	$(ku)' = ku'$
$u \times v$ est dérivable sur I et	$(u \times v)' = u' \times v + v' \times u$
u^n est dérivable sur I et	$(u^n)' = nu' \times u^{n-1}$

$\frac{1}{u}$ est dérivable sur I où u ne s'annule sur I et	$-\frac{1}{u^2}$
$\frac{u}{v}$ est dérivable sur I où v ne s'annule sur I et	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - v' \times u}{v^2}$

Exercice de fixation

Calcule la dérivée sur $[1; +\infty[$ de chacune des fonctions f et g définies respectivement par :

$f(x) = -5x^3 + 7x^2 - 8$ et $g(x) = \frac{x-4}{5x+3}$.

Solution

f est dérivable sur $[1; +\infty[$,

Pour tout $x \in [1; +\infty[$:$f'(x) = (-5x^3 + 7x^2 - 8)'$

$$f'(x) = -15x^2 + 14x$$

g est dérivable sur $[1; +\infty[$, on a :

Pour tout $x \in [1; +\infty[, g'(x) = \frac{1\times(5x+3)-5(x-4)}{(5x+3)^2} = \frac{20}{(5x+3)^2}$

Exercice de maison

f est une fonction définie par : $f(x) = \frac{2x^2+3x}{x+1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f
2) Justifier que pour tout $x \in]-1; +\infty[$, $f'(x) = \frac{2x^2+4x+3}{(x+1)^2}$

V- Dérivée et sens de variation – Extremum relatif d'une fonction

1) Dérivée et sens de variation

Propriété (admise)

f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K.

- f' est positive sur K si et seulement si f est croissante sur K.
- f' est négative sur K si et seulement si f est décroissante sur K.
- f' est nulle sur K si et seulement si f est constante sur K.

2) Extremum relatif d'une fonction

Propriété (admise)

f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K. $x_0$un nombre réel appartenant à K.
$f(x_0)$ est un extrémum relatif de la fonction f si et seulement si f' s'annule en x_0 en changeant de signe.

Exercice de fixation

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 2 + \frac{1}{x}$.

1) Détermine l'ensemble de définition de f.
2) Calcule les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
3) Démontre que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $f'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$
4) Etudie le signe de la fonction dérivée f'(x) suivant les valeurs de x.
5) Déduis-en le sens de variation de f.
6) Dresse le tableau de variation puis détermine les extrêmes relatifs de f.

Solution

1) $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

2) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = -\infty$; $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = +\infty$

3) f est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$
Pour tout $x \in]-\infty; 0[$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$

4) Pour tout $x \in]-\infty; -1[, f'(x) > 0$

Pour tout $x \in]-1\,; 0[, f'(x) < 0$

Pour tout $x \in]0\,; 1[, f'(x) < 0$

Pour tout $x \in]1\,; +\infty[, f'(x) > 0$

5) Pour tout $x \in]-\infty; -1[, f'(x) > 0$ donc f est continue et strictement croissante sur $]-\infty\,; -1[$

Pour tout $x \in]-1\,; 0[, f'(x) < 0$ donc f est continue et strictement décroissante sur $]-1\,; 0[$

Pour tout $x \in]0\,; 1[, f'(x) < 0$ donc f est continue et strictement décroissante sur $]0\,; 1[$

Pour tout $x \in]1\,; +\infty[, f'(x) > 0$ donc f est continue et strictement croissante sur $]1\,; +\infty[$

7) Tableau de variation

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

-4 est un maximum relatif de f sur $]-\infty;-1[$; 0 est un minimum relatif de f sur $]0;+\infty[$

VI- Droite tangente a une courbe ; Théorème des valeurs intermédiaires

1) Équation de la tangente à une courbe en un point

Définition

La tangente à la courbe (C_f) d'une fonction au point A d'abscisse a est la droite :
-passant par A
-de coefficient directeur le nombre dérivée $f'(a)$

Conséquence

Une équation de la tangente à la courbe (C_f) d'une fonction au point A d'abscisse a est
$y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Exercice de fixation

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 - 2$
Sachant que $f'(1) = 2$ et que $f(1) = -3$, déterminer une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 1

2) Théorème des valeurs intermédiaires

ACTIVITE

Le tableau de valeurs ci-dessous est celui de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x$

x à 0,1 près	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
$f(x)$ à 0,01 près	$-1,12$	$-0,70$	$-0,18$	0,73	1,15

Les valeurs de $f(x)$ passent des négatives aux positives.

Sachant que f est continue sur $[1;2]$, existe-t-il un réel α dans $[1;2]$ tel que $f(\alpha) = 0$? Si oui, où semble se placer α ?

Solution

Oui car f est continue sur $[1; 2]$ et les valeurs de $f(x)$ passent des négatives aux positives, la courbe représentative de f coupe l'axe des abscisses. Et α semble se trouver entre 1,7 et α car $f(1{,}7) < 0$ et $f(1{,}8) > 0$.

Nous admettons la propriété suivante

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b éléments de I.

Si f(a) et f(b) sont de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$, admet une solution unique α comprise entre a et b.

Exercice de fixation

Soit la fonction f dérivable sur IR et définie par $f(x) = x^3 - 12x + 10$

Sachant que f est strictement décroissante sur $[0; 1]$,

Démontre que sur [0 ; 1], l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que $0{,}8 < \alpha < 0{,}9$

Solution

f est décroissante sur $[0; 1]$, donc continue sur $[0; 1]$ et $f(0)$=10 puis $f(1) = -1$,

alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0; 1]$.

On a : 0,8 et 0,9 sont éléments de [0 ; 1] puis $f(0{,}8)$=0,912 et $f(0{,}9)$=-0,071

Comme $f(0{,}8)\times f(0{,}9) < 0$, alors $0{,}8 < \alpha < 0{,}9$

3- **encadrement de α tel que : $f(\alpha) = 0$ par la méthode de dichotomie ou par balayage**

a) Méthode de **Dichotomie**

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,; b]$, tel que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires

Il s'agit de déterminer le nombre réel α élément de $[a\,; b]$, tel que : $f(\alpha) = 0$

Cette méthode consiste à diviser l'intervalle $[a\,; b]$ en deux intervalles $\left[a\,; \frac{a+b}{2}\right]$ et $\left[\frac{a+b}{2}\,; b\right]$, puis on calcule f(a) , $f(\frac{a+b}{2})$ et $f(b)$

- Si $f(\text{a}) \times f(\frac{a+b}{2}) < 0$ alors $\alpha \in \left[a\,; \frac{a+b}{2}\right]$,puis on répète la même méthode à l'intervalle $\left[a\,; \frac{a+b}{2}\right]$ jusqu'à trouver la précision cherchée.

- Si , $f(\text{a}) \times f(\frac{a+b}{2}) > 0$ alors $\alpha \in \left[\frac{a+b}{2}\,; b\right]$

On répète cette méthode dans l'intervalle trouvé jusqu'à arriver à la précision cherchée.

Exercice de fixation

Soit la fonction f dérivable sur IR et définie par $f(x) = x^3 - 12x + 10$

Sachant que sur [0 ; 1], l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α, donner un encadrement de α par la méthode de dichotomie

Solution

On a

f est continue sur $[0\,;1]$, $f(0) = 12$ et $f(1) = -1$

Comme $f\left(\frac{1}{2}\right) = 4{,}125$, $f(0) \times f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ donc $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

b) **Méthode par balayage**

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$, tel que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.

Il s'agit de déterminer le nombre réel α élément de $[a\,;b]$, tel que : $f(\alpha) = 0$

On calcule $f(a + 0{,}1)$; $f(a + 0{,}1)$; $f(a + 0{,}1)$;…

On s'arrête lorsqu'on a un résultat de signe contraire au précédent. On déduit un encadrement de α

Exercice de fixation

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x$

Sachant que sur [1 ; 2], l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α, donne un encadrement de α par la méthode de balayage

Solution

f est continue et croissante sur $[1\,;2]$ on a :

x à 0,1 près	1,1	1,2	1,3	1,	1,5	1,6	1,7	1,8
$f(x)$ à 0,01 près	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$

Comme $f(1{,}7) \times f(1{,}8) < 0$ alors $1{,}7 < \alpha < 1{,}8$.

C- SITUATION COMPLEXE

Le comité de gestion scolaire (COGES) d'un lycée veut construire une salle de classe dont le coût de réalisation est estimé à 5 179 000F CFA. Pour cela, il lui faut mobiliser des ressources financières. Il crée alors une imprimerie dont la capacité journalière est entre 30 et 100 articles. Toute la production journalière est vendue.

Chaque article est vendu à 4000 F CFA. Le bénéfice global de l'imprimerie après six mois d'exercice est modélisé par la fonction $\boldsymbol{B}$ **telle que** $\boldsymbol{B(x) = -x^2 + 7200x - 7\,760\,000}$, où $\boldsymbol{x}$ désigne le nombre d'articles vendus durant les six mois.

Ce bénéfice doit servir à la réalisation des travaux de construction.

Le président du COGES a reçu l'information selon laquelle la classe pourra être construite, lorsque le bénéfice sera maximal. Préoccupé, il te sollicite.
Détermine le nombre d'articles que l'on doit fabriquer et vendre pour avoir un bénéfice maximal et réponds à la préoccupation du président du COGES.

Solution

Pour répondre à la préoccupation du président du COGES, nous allons étudier la fonction B et déterminer son maximum.

- Etude de la fonction B

Considérons la fonction B définie sur $[0;+\infty[$, par $B(x) = -x^2 + 7200x - 7760000$.

B est dérivable sur $[0;+\infty[$, et pour tout $x \in [0;+\infty[$, $B'(x) = -2x + 7200$.
$\forall x \in [0;3600[$,$B'(x) > 0$, alors B est strictement croissante sur$]0;3600[$.
$\forall x \in]3600;+\infty[$,$B'(x) < 0$, alors B est strictement décroissante sur$]3600;+\infty[$.

x	0		3600		$+\infty$
$B'(x)$		$+$	0		$-$
$B(x)$			5200000		
		↗		↘	
	-7760000				$-\infty$

- Déterminons le maximum de la fonction

Le nombre d'articles que l'on doit fabriquer et vendre pour avoir un bénéfice maximal est 3600 et ce bénéfice est $5200000F\ CFA$.

Répondons à la préoccupation du président du COGES

5200000 >5170000, donc le bénéfice maximal permettra la construction de cette classe.

D- EXERCICES

Exercice 1

Complète le tableau suivant

Limites	Interprétation graphique
$\lim_{x \to -3} f(x) = +\infty$	
	La droite d'équation $y = 6$ est asymptote horizontale à (C_f) en $+\infty$
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 4$	
	La droite d'équation $y = 2x + 3$ est asymptote oblique à (C_f) en $-\infty$
$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x - 3)] = 0$	

Solution

Limites	Interprétation graphique
$\lim_{x \to -3} f(x) = +\infty$	La droite d'équation x=-3 est asymptote verticale à (C_f) .
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 6$	La droite d'équation $y = 6$ est asymptote horizontale à (C_f) en $+\infty$
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 4$	La droite d'équation $y = 4$ est asymptote horizontale à (C_f) en $-\infty$
$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (2x + 3)] = 0$	La droite d'équation $y = 2x + 3$ est asymptote oblique à (C_f) en $-\infty$
$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x - 3)] = 0$	La droite d'équation $y = x - 3$ est asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$

Exercice 2

Détermine les limites suivantes :

1) $\lim_{x \to 5} (2x + 1)$; 2) $\lim_{x \to -53} 2020$; 3) $\lim_{x \to 4} (-x + 10x^3)$

4) $\lim\limits_{x\to -2} (3x^3 - x^2 + 2x - 1)$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2 - 3x^2 + 2x + 2021)$.

Solution

1) $\lim\limits_{x\to 5}(2x + 1) = 11$;

2) $\lim\limits_{x\to -53} 2020 = 2020$;

3) $\lim\limits_{x\to 4}(-x + 10x^3) = 636$

4) $\lim\limits_{x\to -2} (3x^3 - x^2 + 2x - 1) = -33$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2 - 3x^2 + 2x + 2021) = 2021$.

Exercice

Détermine les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to -\infty} (-3x^3 + 2x + x^5)$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} (2x - 100)$;

3) $\lim\limits_{x\to -\infty} (-x^4 - 6x^3 + 1)$;

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} (-3x^2 + x^3 - 99x + 7)$.

Solution

1) $\lim\limits_{x\to -\infty} (-3x^3 + 2x + x^5) = \lim\limits_{x\to -\infty} x^5 = -\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} (2x - 100) = \lim\limits_{x\to +\infty} 2x = +\infty$.

3) $\lim\limits_{x\to -\infty} (-x^4 - 6x^3 + 1) = \lim\limits_{x\to -\infty} (-x^4) = -\infty$.

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} (-3x^2 + x^3 - 99x + 7) = \lim\limits_{x\to +\infty} x^3 = +\infty$.

Exercice 3

Détermine les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ <}} \frac{x^3}{x-2}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 5 \\ <}} \frac{1}{x-5}$; 3) $\lim\limits_{\substack{x\to -4 \\ >}} \frac{1}{x+4}$.

Solution

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ <}} \frac{x^3}{x-2} = -\infty$;

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 5 \\ <}} \frac{1}{x-5} = -\infty$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to -4 \\ >}} \frac{1}{x+4} = +\infty$.

Exercice 4

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-3x^3+x^2-1}{x^2-5x-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-20x^3+75}{4x^3-2x-90}$; 3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x^4-x^2+5}{-4x^4+2x-7}$; 4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^4-x^2+5}{-2x-1}$

Solution

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-3x^3+x^2-1}{x^2-5x-3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-3x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} (-3x) = -\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-20x^3+75}{4x^3-2x-90} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-20x^3}{4x^3} = -5$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x^4-x^2+5}{-4x^5+2x-7} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-5}{4x} = 0$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^4-x^2+5}{-2x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^4}{-2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} (-\frac{x^3}{2}) = +\infty$

Exercice 5

Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\times g(x)$ sachant que $f(x) = \frac{x^2+6}{x-4}$ et $g(x) = \frac{-x^3+6x+4}{x+2}$.

Solution

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+6}{x-4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^3+6x+4}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^3}{x} = \lim_{x\to+\infty} (-x^2) = -\infty$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\times g(x) = -\infty$

Exercice 6

Calcule les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{\substack{x\to-4\\>}} \frac{x^2+6x-10}{x+4}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\>}} \frac{x^2-5x+7}{x-2}$; 3) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\<}} \frac{x^2-5x+7}{x-2}$;

4) $\lim\limits_{\substack{x\to5\\>}} \frac{2x^2-x+1}{x-5}$; 5) $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} \frac{x^2-x-1}{x+1}$; 6) $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} \frac{x^2-x-1}{x+1}$

Solution

1) $\lim\limits_{\substack{x\to-4\\>}} \frac{x^2+6x-10}{x+4} = \lim\limits_{\substack{x\to-4\\>}} (x^2+6x-10)\times\frac{1}{x+4} = -\infty$.

Car $\lim\limits_{\substack{x\to-4\\>}} (x^2+6x-10) = -18$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-4\\>}} \frac{1}{x+4} = +\infty$.

2) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\>}} \frac{x^2-5x+7}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to2\\>}} (x^2-5x+7)\times\frac{1}{x-2} = +\infty$.

Car $\lim\limits_{\substack{x\to2\\>}} (x^2-5x+7) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\>}} \frac{1}{x-2} = +\infty$.

3) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\<}} \frac{x^2-5x+7}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to2\\<}} (x^2-5x+7)\times\frac{1}{x-2} = -\infty$.

Car $\lim\limits_{\substack{x\to2\\<}} (x^2-5x+7) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\<}} \frac{1}{x-2} = -\infty$.

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\>}} \frac{2x^2-x+1}{x-5} = \lim\limits_{\substack{x\to 5\\>}} (2x^2-x+1) \times \frac{1}{x-5} = +\infty$

Car $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\>}} (2x^2-x+1) = 46$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\>}} \frac{1}{x-5} = +\infty$

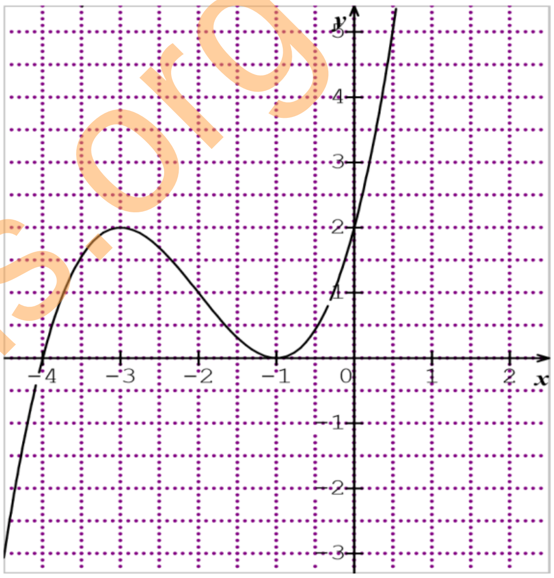
5) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\>}} \frac{x^2-x-1}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\>}} (x^2-x-1) \times \frac{1}{x+1} = +\infty$

Car $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\>}} (x^2-x-1) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\>}} \frac{1}{x+1} = +\infty$

6) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\<}} \frac{x^2-x-1}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\<}} (x^2-x-1) \times \frac{1}{x+1} = -\infty$

Car $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\<}} (x^2-x-1) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\<}} \frac{1}{x+1} = -\infty$

Exercice 7



Sur la figure ci- contre, on donne la représentation graphique d'une fonction f dérivable et définie sur IR.

1. Par lecture graphique, Précise les variations de f.

2. Dresse le tableau de variations de f.

3. On suppose que (C_f) admet un centre de symétrie.
   Précise par lecture graphique les coordonnées de ce centre de symétrie

4. Précise l'extrémum relatif de f sur $]-\infty\,;-1[$ puis sur $]-3\,;+\infty[$

5. Résous graphiquement dans $\mathbb{R}$:

   a) $x \in \mathbb{R}, f(x) = 1$
   b) $x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 1$
   c) $x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 0$

Solution

1) f est strictement croissante sur $]-\infty\,;-3[$ et sur $]-1\,;+\infty[$.
f est strictement décroissante sur $]-3\,;-1[$.

2) tableau de variation de f.

3) le centre de symétrie de (C_f) est le point de coordonnées $(-2\,;1)$.

4) f est croissante sur $]-\infty\,;-3[$ puis décroissante sur $]-3\,;-1[$ donc 2 est le maximum relatif
de f sur $]-\infty\,;-1[$.
f est décroissante sur $]-3\,;-1[$ puis croissante sur $]-1\,;+\infty[$ donc 0 est le minimum relatif
de f sur $]-3\,;+\infty[$.

5) a) $S = \{-3{,}75\,;\,-2\,;\,-0{,}25\}$.
b) $S = [-3{,}75\,;\,-2] \cup [-0{,}25\,;\,+\infty[$.
c) $S =]-\infty\,;\,-4] \cup \{-1\}$.

Exercice 8

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2+3x+3}{x+1}$

1. Justifie que l'ensemble de définition de D_f de f est $D_f =]-\infty\,; -1[\, \cup\,]-1\,; +\infty[$

2.a) Calcule les limites de f à gauche et à droite en -1.

b) Donne l'interprétation graphique de ces résultats.

3. Détermine les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

4. Démontre que pour tout $x \in D_f, f(x) = x + 2 + \frac{1}{x+1}$.

5.a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à (C_f) en $-\infty$ et en $+\infty$

b) Etudie la position relative de (C_f) et (D).

6-a) Démontre que pour tout $x \in D_f, f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

b) Etudie le signe de $f'(x)$ puis déduis-en les variations de f.

c) Dresse le tableau de variation de f.

7. Démontre que le point A $(-1\,;\,1)$ est centre de symétrie de (C_f).

8. a) Reproduis et complète le tableau suivant :

x	-3	-2	$-1{,}5$	-1,8	-1	$-0{,}8$	$-0{,}5$	0	1	2
$f(x)$										

b) Trace(C_f) sur $[-3\,;\,2]$.

Solution

1) $x \in D_f$ si et seulement si $x + 1 \neq 0$

si et seulement si $x \neq -1$

donc $D_f =]-\infty\,; -1[\, \cup\,]-1\,; +\infty[$

2) a) Limite de f à gauche en -1.

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{x^2+3x+3}{x+1} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} (x^2+3x+3) \times \frac{1}{x+1} = -\infty$$

car $\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{1}{x+1} = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} (x^2+3x+3) = 1$

Limite de f à droite en -1

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{x^2+3x+3}{x+1} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} (x^2+3x+3) \times \frac{1}{x+1} = +\infty$$

Car $\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{1}{x+1} = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} (x^2+3x+3) = 1$

b) $\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale à (C_f).

3) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+3x+3}{x+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+3x+3}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

4) Pour tout $x \in D_f$, $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x+1}$

5) a) $\lim_{x \to -\infty} (\,f(x) - (x+2)) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ et

$$\lim_{x \to +\infty} (\,f(x) - (x+2)) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

Donc la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à (C_f)en $-\infty$ et en $+\infty$

b) On a $f(x) - (x+2) = \frac{1}{x+1}$

Or pour tout $x \in]-\infty\,;\,-1[$, $\frac{1}{x+1} < 0$ et pour tout $x \in]-1\,;\,+\infty[$, $\frac{1}{x+1} > 0$

donc sur $]-1\,;\,+\infty[$, (C_f) est au-dessus de (D) et sur $]-\infty\,;\,-1[$, (C_f) est en dessous de (D)

6-a) Pour tout $x \in D_f$ $f'(x) = \frac{(x^2+3x+3)'(x+1)-(x^2+3x+3)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2x(x+1)-(x^2+3x+3)}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

d) On a $f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ or pour tout réel $x \neq 1$, $(x+1)^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x(x+2)$

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$	

Pour tout $x \in]-\infty\,;\,-2\,[\, \cup\,]0\,+\infty[$, $f'(x) > 0$

Pour tout $x \in]-2\,;\,-1\,[\, \cup\,]-1;0[$, $f'(x) < 0$

Par suite f est strictement croissante sur $]-\infty\,;\,-2\,[$ et sur $]0\,+\infty[$

Et est strictement décroissante sur $]-2\,;\,-1\,[$ et sur $]-1;0[$

e) le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	3	↗	$+\infty$

7) On a $f(-1+x) + f(-1-x) = -1+x+2+\frac{1}{-1+x+1} - 1 - x + 2 + \frac{1}{-1-x+1}$

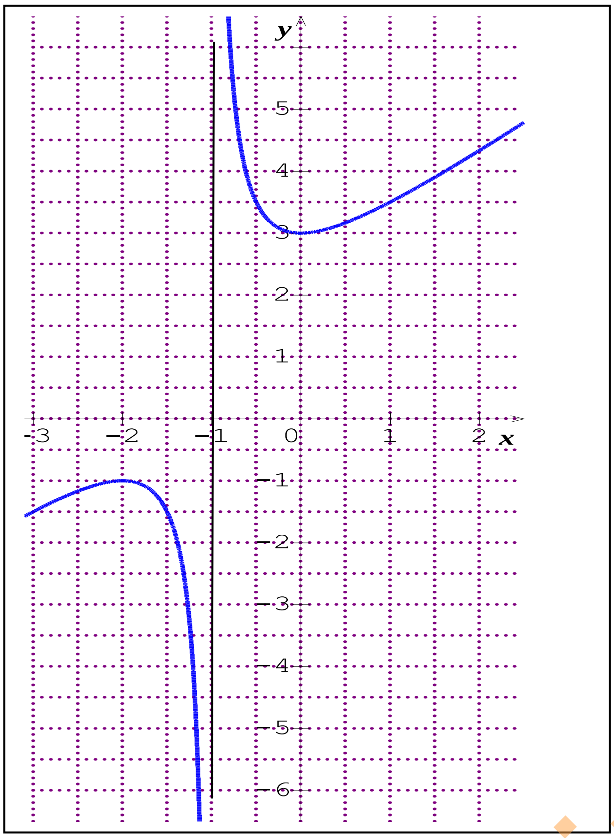
$= 2 = 2 \times 1$

Donc le point A $(-1\,;\,1)$ est centre de symétrie de (C_f).

8) a) on a :

x	-3	-2	$-1{,}5$	-1,8	-1	$-0{,}8$	$-0{,}5$	0	1	2
$f(x)$	-1,5	-1	-1,5	-1,05	[redacted]	6,2	3,5	3	3,5	4,33

b) Courbe (C_f)



Exercice 9

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x - 8 + \frac{1}{x-3}$ et (C) sa courbe représentative.

4) Calcule $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}} f(x)$ puis interprète les résultats.

5) a) Justifie que $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x-8)] = 0$.

   b) Déduis - en que la droite (D) d'équation $y = x - 8$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.

6) Justifie que la droite (D) d'équation $y = x - 8$ est asymptote oblique à la courbe de f en -∞ .

7) Détermine les positions relatives de (C) et de (D).

Solution

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} x - 8 + \frac{1}{x-3} == -\infty$. Car $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ <}} (x-8) = -5$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} \frac{1}{x-3} = -\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}} (x - 8 + \frac{1}{x-3}) = +\infty$. Car $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ >}} (x-8) = -5$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}} \frac{1}{x-3} = +\infty$.

Donc la droite d'équation x= 3 est asymptote verticale à (C) .

2) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x-8)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x-3} = 0$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x-8)] = 0$ donc la droite (D) d'équation $y = x - 8$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (x-8)] = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x-3} = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x-8)] = 0$; donc la droite (D) d'équation $y = x - 8$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.

4) on a $f(x)-(x-8)=\frac{1}{x-3}$.

Pour tout $x \in]-\infty-3[$, $\frac{1}{x-3}>0$ donc (C) est au-dessus de (D) sur $]-\infty-3[$.

Pour tout $x \in]-3+\infty[$, $\frac{1}{x-3}<0$ donc (C) est en-dessous de (D) sur $]-3+\infty[$.