**THÈME : MODÉLISATION D'UN PHÉNOMÈNE ALÉATOIRE**

**Durée : 18 heures** **Code :**

# Léçon 2 : PROBABILITÉ CONDITIONNELLE ET VARIABLE ALÉATOIRE

## A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pour l'organisation de la kermesse de leur Lycée, les élèves d'une classe de terminale proposent le jeu suivant à un stand :
« Une urne contient trois boules rouges numérotées 100, 200 et 300 et deux boules noires numérotées 2 et 5, toutes indiscernables au toucher ».
Les règles du jeu sont les suivantes :
Le joueur mise x francs CFA et tire successivement avec remise deux boules de l'urne. Si les deux boules tirées sont de même couleur, la partie est perdue et il perd sa mise. Sinon, le joueur remporte le montant en francs CFA égal au produit des numéros apparus sur les boules tirées.
On appelle gain algébrique du joueur la différence entre ce qu'il obtient à l'issue du jeu et sa mise. Le joueur est perdant si son gain algébrique est négatif.
Pour ne pas être perdant, ces élèves souhaitent déterminer la mise minimale du joueur pour que le jeu leur soit avantageux. Ensemble, ils s'organisent pour trouver cette mise.

## B.CONTENU DE LA LEÇON

### I. Probabilités conditionnelles

#### 1. Définition

Soit B un évènement d'un univers Ω tel que P(B) ≠ 0.
On appelle **probabilité conditionnelle sachant que B est réalisé**, l'application $P_B$ qui à tout évènement A de Ω associe le nombre réel $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.
Le nombre réel $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ est noté $P_B(A)$ ou P (A/B) et se lit probabilité de A sachant que B est réalisé ou simplement probabilité de A sachant B ou encore probabilité de A si B.
Ainsi on a : $P(A/B) = P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

<u>**Exercice de fixation**</u>

E et F sont deux événements tels que : $p(E)=\frac{1}{2}$ ; $p(F)=\frac{3}{4}$ et $p(E\cap F)=\frac{2}{5}$
Calcule $p_E(F)$ et $p_F(E)$

<u>**Solution**</u>

On a :
$P_E(F) = \frac{p(E\cap F)}{p(E)} = \frac{4}{5}$ et $P_F(E) = \frac{p(E\cap F)}{p(F)} = \frac{8}{15}$

## 2. Conséquence de la définition

Soit A et B deux évènements d'un univers $\Omega$ tels que : $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$

**$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$**

**$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$**

**<u>Exercice de fixation</u>**

I et F sont deux événements tels que : p(F)= 0,75 et $p_F(I) = 0{,}45$ .

Calcule $p(F \cap I)$.

**<u>Solution</u>**

On a: $P(F \cap I) = P_F(I) \times p(F)$

$= 0{,}45 \times 0{,}75$

$= 0{,}3375$

## 3. Évènements indépendants

**Dans la suite de la leçon, A et B sont des évènements d'un même univers**

### a. Définition

Soit P une probabilité définie sur un univers $\Omega$.

Deux évènements A et B de $\Omega$ sont indépendants lorsque : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

### b. Conséquence de la définition

Soit A et B deux événements d'un univers $\Omega$ tels que A et B soient de probabilités non nulles

A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$ ou $P_A(B) = P(B)$

**Interprétation**

Les évènements A et B sont indépendants lorsque la réalisation de l'un n'influence pas la réalisation de l'autre.

### c. Propriétés

Si A et B sont deux événements indépendants alors :

$\overline{A}$ et $B$ sont indépendants ;

$A$ et $\overline{B}$ sont indépendants ;

$\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

**Remarque :**

Ne pas confondre évènements incompatibles et événements indépendants.

Deux événements incompatibles de probabilités non nulles ne peuvent pas être indépendants.

**Exercice de fixation**

On lance une pièce de monnaie parfaitement équilibrée. Soit A l'événement « obtenir Face au premier lancer » et B l'événement « obtenir Face au second lancer ».

Justifie que A et B sont deux évènements indépendants.

**<u>SOLUTION</u>**

L'univers $\Omega$ = {(P, P) ;(P ;F) ;(F ;P) ;(F ;F)}.

Card $\Omega = 2^2 = 4$

A = {(F; P) ;( F; F)}; B= {(P; F) ;( F; F)}; $A \cap B$ = {(F; F)}.

$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ; $P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ , $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ et $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, donc A et B sont deux évènements indépendants.

## 4. Formule des probabilités totales

### a) Partition d'un ensemble

**Définition**

Soit Ω un ensemble non vide et $B_1$, $B_2$,…,$B_n$ des parties de Ω tel que $n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
$B_1$, $B_2$,…,$B_n$ forment une partition de l' ensemble Ω signifie que $B_1$, $B_2$,…,$B_n$ sont deux à deux disjoints et $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$

**Exercice de fixation**

Soit l'ensemble A tel que : A = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8}
Justifie que les ensembles B, C, D et E ci-dessous forment une partition de l'ensemble A.
B = {1; 2} , C = {3; 4; 5}, D = {6; 7} et E = {8}.

**Solution**

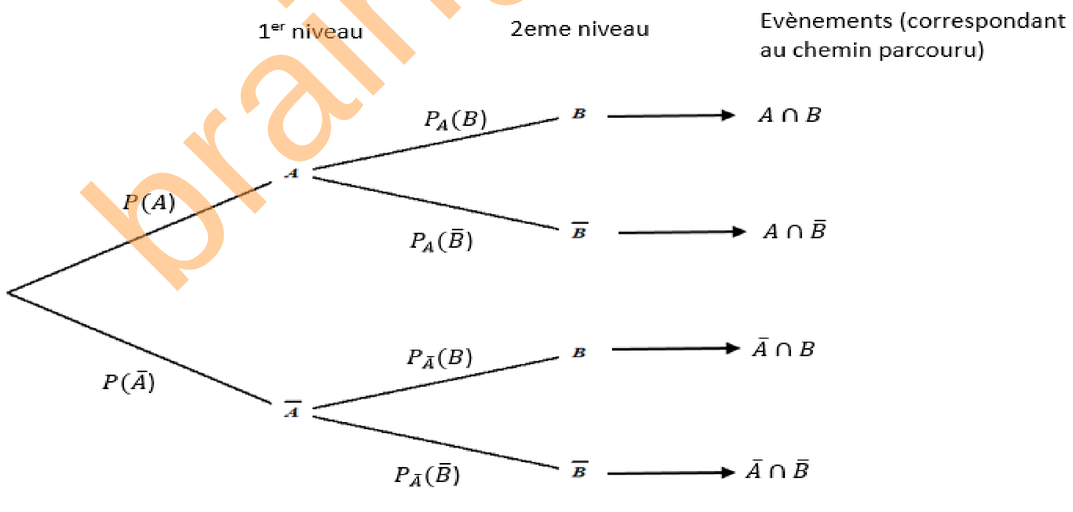
$B \cap C = \emptyset$, $B \cap D = \emptyset$, $B \cap E = \emptyset$, $C \cap D = \emptyset$, $C \cap E = \emptyset$, $D \cap E = \emptyset$ et $B \cup C \cup D \cup E = A$.
Donc B, C, D et E forment une partition de l'ensemble A.

### b) Formule des probabilités totales

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2.
$B_1$, $B_2$,…,$B_n$ forment une partition d'un univers Ω telle que la probabilité de chaque événement $B_i (1 \leq i \leq n)$ soit non nulle.
- Pour tout évènement A de Ω, $P(A) = P(A \cap B_1) + \cdots + P(A \cap B_n)$.
- Pour tout $i$ $(1 \leq i \leq n)$, $P(A \cap B_i) = P_{B_i}(A) \times P(B_i)$

### c) Arbre de probabilités ou arbre pondéré

Un arbre de probabilités (ou arbre pondéré) est un schéma permettant de résumer une expérience aléatoire connaissant des probabilités conditionnelles.
En voici une présentation :

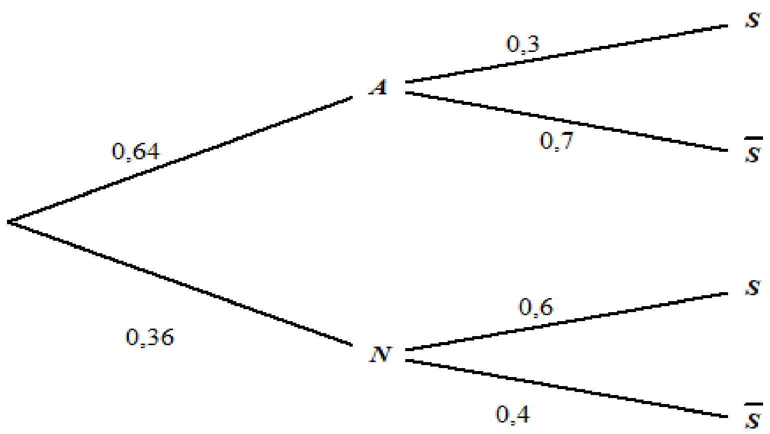



**Exercice de fixation**

Un magasin propose des réductions sur les deux marques d'ordinateurs qu'il distribue. La marque A représente 64 % des ordinateurs vendus et la marque N, 36 % .
30 % des ordinateurs de la marque A et 60 % de la marque N sont soldés.
On désigne par : A l'évènement « obtenir un ordinateur de marque A », N l'évènement « obtenir un ordinateur de marque N » et S l'évènement « obtenir un ordinateur soldé ».

Construis un arbre pondéré décrivant la situation.

**Solution**




## II-Variable aléatoire

**Dans toute la suite, Ω est un univers fini.**

### 1 . Définitions

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω.

■ On appelle variable aléatoire, toute application X de Ω dans IR.

■ Soit X une variable aléatoire qui, à chaque éventualité $e_i$ de Ω, associe un nombre réel $x_i$ .
L'ensemble $\{x_1 ; x_2 ; ... ; x_n\}$ se note X (Ω) et s'appelle l'ensemble des valeurs prises par X ou l'univers image de Ω par X.

■ Soit P une probabilité sur Ω.
La loi de probabilité de X est l'application qui, à toute valeur $x_i$, prise par X, associe P$(X = x_i)$ où $(X = x_i)$ est l'ensemble $\{\omega \in \Omega,\ \mathrm{X}(\omega) = x_i\}$.

**NB** : Il est commode de représenter une loi de probabilité par un tableau du type :

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $p_1$ | $p_2$ | … | $p_n$ |

Dans ce tableau les éléments $x_i$ sont rangés dans l'ordre croissant.
**Remarque :** $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

**Exercice de fixation**

Une urne contient six boules indiscernables au toucher dont deux sont blanches et quatre sont rouges. On tire simultanément trois boules de l'urne et on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.
1) Détermine les valeurs prises par la variable aléatoire X.
2) Etablis la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

**Solution**

Soit Ω l'univers associé.
1) Dans ce tirage simultané de trois boules nous pouvons avoir soit aucune boule blanche, soit une boule blanche, soit deux boules blanches. Donc les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : 0;1 ou 2. Ainsi X (Ω) = {0; 1; 2}
2) L'univers Ω est l'ensemble de tous les tirages simultanés de trois boules parmi six ;
donc Card(Ω) = $C_6^3$= 20.

• (X = 0) correspond au tirage de trois boules rouges donc p(X = 0) $= \frac{C_4^3}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

• (X = 1) correspond au tirage d'une boule blanche et de deux boules rouges donc

P(X = 1) $= \frac{C_2^1 \times C_4^2}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

• (X = 2) correspond au tirage de deux boules blanches et d'une boule rouge donc

P(X = 2) $= \frac{C_2^2 \times C_4^1}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

Nous avons le tableau suivant :

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |

## 2. Espérance mathématique, variance et écart type.

**Définitions**

Soit X une variable aléatoire prenant *n* valeurs $x_1$ ; $x_2$ ; … ; $x_n$ avec les probabilités respectives $p_1$ ; $p_2$ ; … ; $p_n$.

■ On appelle espérance mathématique ou moyenne de X le nombre réel noté E(X) tel que :

E(X) $= \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$.

■ On appelle variance de X le nombre réel positif noté V(X) tel que :

V(X) $= \sum_{i=1}^{n}(x_i - E(X))^2 p_i = (x_1 - E(X))^2p_1 + (x_2 - E(X))^2p_2 + \cdots + (x_n - E(X))^2p_n$

■ On appelle écart type de X le nombre réel noté $\sigma$(X) tel que : $\sigma$(X) = $\sqrt{V(X)}$ .

<u>Remarque</u>

La variance d'une variable aléatoire X peut être donnée par :

V(X) = E($X^2$) - $[E(X)]^2 = {x_1}^2p_1 + {x_2}^2p_2 + \cdots + {x_n}^2p_n - [E(X)]^2$

**Interprétation de l'espérance mathématique en termes de jeu :**

Soit E(X) l'espérance mathématique d'une variable aléatoire X désignant le gain algébrique (différence entre la somme perçue et la mise).

E(X) est le gain moyen d'un joueur.

♦Lorsque $E(X) > 0$, le jeu est **avantageux pour le joueur**.

♦Lorsque $E(X) < 0$, le jeu est **désavantageux pour le joueur**.

♦Lorsque $E(X) = 0$, le jeu est **équitable**.

<u>**Exercice de fixation**</u>

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-dessous.

| $x_i$ | -1000 | 100 | 300 | 600 |
|---|---|---|---|---|
| P(X = $x_i$ ) | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

Calcule l'espérance mathématique et l'écart type de la variable X.

**Solution**

. E(X) = (-1000)$\left(\frac{1}{8}\right)$ + 100$\left(\frac{3}{8}\right)$+ 300$\left(\frac{3}{8}\right)$+ 600$\left(\frac{1}{8}\right)$= 100

## 3 . Schéma de Bernoulli

**a. Définitions**

■Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire ne conduisant qu'à deux éventualités exclusives : l'une est appelée **succès** notée S et l'autre **échec** notée $\overline{S}$.

■Un **schéma de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui consiste à répéter $n$ fois de suite ($n \geq 2$ ) de façons indépendantes une même épreuve de Bernoulli.

La probabilité **p** de succès est appelée **paramètre** de l'épreuve de Bernoulli.

La probabilité **p** de succès et **n** sont appelés **paramètres** du schéma de Bernoulli.

**Remarque**

Lorsqu'on a une épreuve de Bernoulli, si on note p la probabilité du succès, alors celle de l'échec est 1- **p**.

**<u>Exercice de fixation</u>**

On lance une fois un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On s'intéresse à l'apparition du chiffre 6 sur la face supérieure.
Justifie qu'on a une épreuve de Bernoulli dont tu préciseras la probabilité de succès.

**Solution**

Le lancer de ce dé cubique conduit à deux éventualités exclusives : « obtenir 6 » avec une probabilité de $\frac{1}{6}$ et « ne pas obtenir 6 » avec une probabilité de $\frac{5}{6}$.
On a une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès $\frac{1}{6}$.

**b. Propriété**

Soit un schéma de Bernoulli à $n$ épreuve et $p$ la probabilité du succès (celle de l'échec est 1-p).
La probabilité d'obtenir exactement $k$ succès au cours des $n$ épreuves est :
$\boldsymbol{C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}$ où $0 \leq k \leq n$.

**<u>Exercice de fixation</u>**

On lance 5 fois de suite un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de1 à 6 et on note après chaque lancer, le chiffre apparu sur la face supérieure.
Calcule la probabilité d'obtenir exactement 4 fois le chiffre 2.

**Solution**

Considérons l'épreuve de Bernoulli qui consiste à lancer le dé et à s'intéresser au chiffre 2.
Le succès S « Obtenir 2 » a pour probabilité $P(S) = \frac{1}{6}$.
L'épreuve étant répétée 5 fois de suite et de façon indépendante, on a un schéma de Bernoulli.
L'événement« Obtenir exactement 4 fois le chiffre 2 au cours des 5 lancers » a pour probabilité :$C_5^4 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(1-\frac{1}{6}\right)^1 = \frac{25}{7776}$.

## 4. Loi binomiale

**a. Définition**

Soit un schéma de Bernoulli à $n$ épreuves identiques, $p$ la probabilité du succès et X la variable aléatoire désignant le nombre $k$ ($0 \leq k \leq n$) de succès au cours des $n$ épreuves.
La loi de probabilité de X est définie par : $\boldsymbol{P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}$
Cette loi de probabilité est appelée loi binomiale de paramètres $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{p}$**.**
Elle est notée B($n$;$p$**).**

**b. Propriété**

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.
L'espérance mathématique E(X) et la variance V(X) de X sont données par les formules :

E(X) = np et V(X) = np(1-p)

**<u>Exercice de fixation</u>**

Sur une route, un carrefour est muni d'un feu tricolore A. On admet que la probabilité pour que le feu A soit vert est $\frac{3}{4}$.

Un automobiliste passe 5 fois à ce carrefour muni du feu A.

Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de fois où l'automobiliste rencontre le feu vert.

1) Calcule la probabilité pour que l'automobiliste rencontre exactement 3 fois le feu vert.

2.a) Calcule l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X.

b.)Donne l'arrondi d'ordre zéro de l'espérance mathématique de X et interprète ce résultat.

**Solution**

**1)** Lorsque l'automobiliste se présente au carrefour A, on s'intéresse à deux résultats : S « il rencontre le feu vert » et $\overline{S}$ « il ne rencontre pas le feu vert ». Cette expérience est une épreuve de Bernoulli. On a $P(S) = \frac{3}{4}$.

L'épreuve étant répétée 5 fois de suite et de façon indépendante, la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p tels que : $n = 5$ et $p = \frac{3}{4}$..

La probabilité pour que l'automobiliste rencontre exactement 3 fois le feu vert est :

$P(X = 3) = C_5^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{270}{1024} \approx 0{,}26.$

2.a) Ici, il est préférable d'utiliser les formules $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$ lorsque X suit une loi binomiale de paramètres$n$ et $p$. Ainsi, $E(X) = 5 \times \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$ et $V(X) = 5 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{15}{16}$

b.)$E(X) \approx 4$ . L'automobiliste rencontre en moyenne 4 feux verts en passant 5 fois au carrefour muni du feu A.

### 2.5 Fonction de répartition

**Définition**

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω et P une probabilité sur Ω.

La fonction de répartition de $X$ est l'application F de ℝ dans$[0; 1]$ définie par : $F(x) = P(X \leq x)$.

**<u>Exercice de fixation</u>**

Détermine et représente graphiquement la fonction de répartition F de la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous.

| $x_i$ | -1000 | 100 | 300 | 600 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

**Solution**

**• Détermination de F.**

La fonction de répartition F de X est définie sur ℝ par :

Pour tout $x \in ]-\infty; -1000[, F(x) = 0$

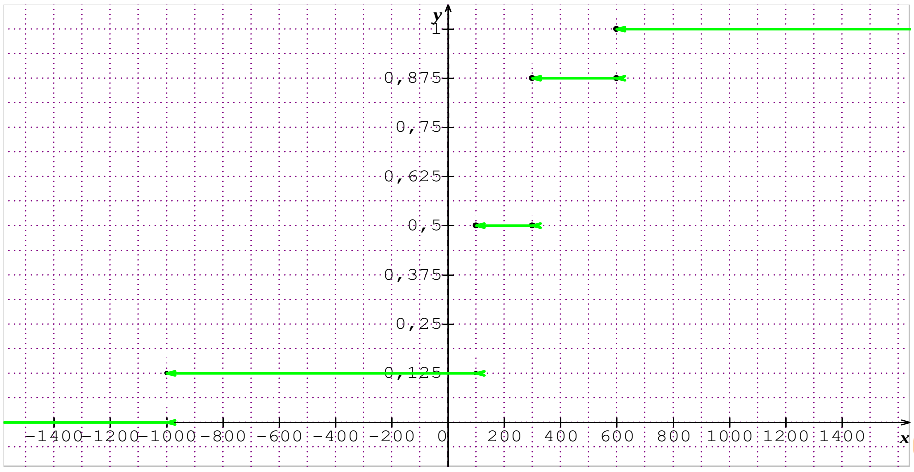
Pour tout $x \in [-1000;\ 100[, F(x) = \frac{1}{8}$

Pour tout $x \in [100;\ 300[, F(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$

Pour tout $x \in [300;\ 600[, F(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$

Pour tout $x \in [600;\ +\infty[, F(x) = \frac{7}{8} + \frac{1}{8} = 1.$

**• Représentation graphique de F.**




**Remarque**
La fonction de répartition est une fonction définie par intervalles.
La fonction de répartition est une fonction en escalier, croissante.

## C. SITUATION COMPLEXE

Lors de la fête de fin d'année, une enquête faite par le conseil scolaire d'un lycée, auprès d'un échantillon d'élèves de terminales C et D révèle que :

- 25% des élèves aiment jouer au damier sachant qu'ils sont de la terminale C.
- Un tiers des élèves aiment jouer au damier sachant qu'ils sont de la terminale D.
- 3 élèves sur 10 aiment jouer au damier.

Dago, le responsable des jeux et loisirs du conseil scolaire, choisit au hasard un élève de cet échantillon et note :
Cependant, Dago ne se souvient plus de la proportion des élèves de la de terminale D qui doit figurer dans son rapport.
Pour cela, étant élève de la terminale C, il sollicite ton aide.
A l'aide de tes connaissances mathématiques, aide Dago à retrouver la valeur de p(E).

**Solution**

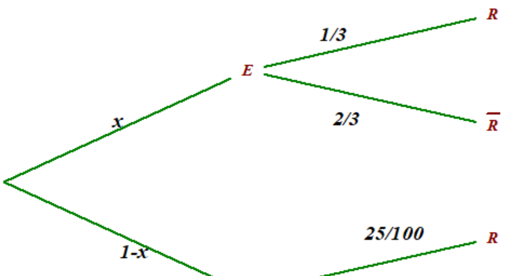
- ✓ Pour répondre à la préoccupation de Dago, je vais utiliser les probabilités.
- ✓ J'utilise les probabilités conditionnelles et la formule des probabilités totales

**Modélisation du problème :**

- E l'événement « l'élève choisi est en classe de terminale D » ;
- R l'événement « l'élève choisi aime jouer au damier » ;
- P(E) la probabilité de l'événement E.

*Je traduis cette situation par un arbre de probabilités ;
*Je détermine p(E).

Pour ce faire, posons $x = P(E)$



On a les probabilités suivantes :
$P(\bar{E})$=1-$x$ ; $P_E$(R)= $\frac{1}{3}$ ; $P_E(\bar{R})$= $\frac{2}{3}$ ; $P_{\bar{E}}$(R)= $\frac{25}{100}$ et $P_{\bar{E}}(\bar{R})$= $\frac{75}{100}$ .
En utilisant la formule des probabilités totales, on a :
$P(R) = P(R \cap E) + P(R \cap \bar{E})$ ; comme $(R) = \frac{3}{10}$,
alors $\frac{3}{10} = \frac{1}{3}x + \frac{25}{100}$ (1-$x$) d'où $x$= $\frac{3}{5}$ .
Donc finalement p(E)= $\frac{3}{5}$
Je réponds à la préoccupation de Dago
la proportion des élèves de la de terminale D est 60 %.

## D. EXERCICES

### Exercices de renforcement

**Exercice 1**

Un joueur lance successivement trois fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée. Il gagne 600 francs s'il obtient 3 fois « FACE ». Il gagne 300 francs s'il obtient exactement 2 fois « FACE » et gagne 100 francs s'il obtient exactement une fois « FACE », mais il perd 1000 francs s'il n'obtient que des « PILE ». On désigne par X la variable aléatoire représentant en francs le gain du joueur (un gain est positif ou négatif).
1) Détermine la loi de probabilité de la variable X.
2) Calcule la probabilité de gagner strictement moins de 300 francs.
3) a. Calcule l'espérance mathématique de la variable X.
   b. Que représente ce résultat pour le joueur ?
   c. Interprète ce résultat pour le joueur.
4) Calcule le montant que le joueur devrait payer lorsqu'il n'obtient que des « PILE » pour que le jeu soit équitable.

***Solution***

1. Les résultats possibles sont : (F;F;F) ; (F;F;P) ; (F;P;F) ; (P;F;F) ; (P;P;F) ; (P;F;P) ; (F;P;P) ; (P;P;P).
Les différents résultats possibles donnent les gains suivants : -1000 ; 100 ; 300 ; 600.
L'ensemble des valeurs prises par X est :$\{-1000\,;\ 100\,;\ 300\,;\ 600.\}$
P(X= -1000) = P({(P ; P ; P)})= $\frac{1}{8}$ ; P(X= 100) = P({(P; P; F) ; (P; F; P) ; (F; P; P)}) = $\frac{3}{8}$ ;
P(X= 300) = P ({(F; F; P) ; (F; P; F) ; (P; F; F) })= $\frac{3}{8}$ ; P(X= 600) = P({(F ; F ; F)})= $\frac{1}{8}$

| $x_i$ | -1000 | 100 | 300 | 600 |
|---|---|---|---|---|
| P(X = $x_i$ ) | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

2. Soit A l'événement « Gagner moins de 300F ».
Donc P(A)= P(X= -1000) + P(X= 100)= $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$ .
3. a. E(X) = (-1000)$\left(\frac{1}{8}\right)$ + 100$\left(\frac{3}{8}\right)$+ 300$\left(\frac{3}{8}\right)$+ 600$\left(\frac{1}{8}\right)$= 100.
   b. 100 F représente le gain moyen du joueur.
   c. E(X) > 0 donc le jeu est favorable au joueur.

4. Soit S le montant que le joueur devrait payer s'il n'obtenait que des « PILE » pour que le jeu soit équitable.

$E(X) = (-S)\left(\frac{1}{8}\right) + 100\left(\frac{3}{8}\right) + 300\left(\frac{3}{8}\right) + 600\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1800-S}{8}$ .

Le jeu est équitable lorsque E(X) = 0.

$E(X) = 0 \Leftrightarrow \frac{1800-S}{8} = 0 \Leftrightarrow S = 1800.$

Le joueur doit payer 1800F lors

## Exercice 2

Une urne contient trois boules blanches et cinq boules noires, indiscernables au toucher.

On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Lorsqu'on tire une boule blanche , on marque un point ; lorsqu'on tire une boule noire, on perd un point. Désignons par X La variable aléatoire égale au nombre de points marqués.

1) Détermine les valeurs prises par X.

2) Etablis la loi de probabilité de X.

**Solution**

1) Inventaire de toutes les éventualités :

Désignons par B une boule blanche et par N une boule noire.

Les différentes éventualités sont : BBB, BBN, BNN et NNN ; ce qui correspond respectivement aux points marqués : +3, +1,-1 et -3.

L'ensemble des valeurs prises est {3 ; 1 ;-1 ;-3}

2) Loi de probabilité de X.

$P(X=-3)=\frac{C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56}$

$P(X= -1)=\frac{C_3^2 \times C_5^1}{C_8^3} = \frac{15}{56}$

$P(X=1)= \frac{C_3^1 \times C_5^2}{C_8^3} = \frac{30}{56}$

$P(X=3)=\frac{C_5^3}{C_8^3} = \frac{10}{56}$

## Exercice 3

Sur un disque, on a enregistré dix morceaux différents. Le temps d'écoute de chacun d'eux est donné dans le tableau :

| Code du morceau enregistré | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Temps d'écoute en secondes | 280 | 200 | 240 | 280 | 260 | 240 | 280 | 200 | 240 | 280 |

Un appareil de lecture sélectionne au hasard un des dix morceaux et un seul.

Tous les morceaux ont la même probabilité d'être sélectionnés.

1. Calcule la probabilité, pour que chacun des morceaux soit sélectionné à cette lecture.

2.a) Calcule la probabilité de l'événement $E_1$ :

« Le morceau sélectionné a une durée d'écoute de 240 secondes ».

b) Calcule la probabilité de l'événement $E_2$ :

« Le morceau sélectionné a une durée d'écoute supérieure à 220 secondes ».

3. On note X la variable aléatoire qui, à tout morceau sélectionné, associe le temps d'écoute de ce morceau.

a) Détermine la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b) Calcule l'espérance mathématique de X.

**Solution.**
1.
On a:
$P(A) = P(D) = P(G) = P(J) = \frac{280}{2500} = \frac{14}{125}$ , $P(C) = P(F) = P(I) = \frac{240}{2500} = \frac{12}{125}$ ,
$P(B) = P(H) = \frac{200}{2500} = \frac{10}{125}$, $P(E) = \frac{260}{2500} = \frac{13}{2500}$.
2a) $P(E_1) = P(I) + P(F) + P(C) = 3 \times \frac{12}{125} = \frac{36}{125}$
b) $P(E_2) = 1 - [P(B) + P(H)] = 1 - \frac{20}{125} = \frac{105}{125}$
3.a) L'ensemble des valeurs prises par X est : {200 ; 240 ; 260 ; 280}
La loi de probabilité de X :
$P(X = 200) = \frac{20}{125}$ ; $P(X = 240) = \frac{36}{125}$ ; $P(X = 260) = \frac{13}{125}$ ; $P(X = 280) = \frac{56}{125}$
b) Esperance mathématique de X.
$E(X) = 200 \times \frac{20}{125} + 240 \times \frac{36}{125} + 260 \times \frac{13}{125} + 280 \times \frac{56}{125} = \frac{31700}{125} = \frac{1268}{5}$.

**Exercice 4**

A la suite d'un sondage effectué à propos de la construction d'un barrage, on estime que : 65% de la population concernée est contre la construction du barrage et parmi ces opposants, 70% sont des écologistes. Parmi les personnes non opposées à la construction, 20% sont des écologistes. On interroge une personne au hasard.
1) Calcule la probabilité que cette personne interrogée soit opposée à la construction du barrage et soit écologiste.
2) Calcule la probabilité qu'elle ne soit pas opposée à la construction du barrage et soit écologiste.
3) Déduis-en la probabilité qu'une personne interrogée soit écologiste.

**NB** : Pour faciliter les réponses aux différentes questions, on pourra noter les évènements

**Solution**
Désignons par E l'événement : « la personne interrogée est écologiste « et par C l'événement : « la personne interrogée est contre la construction du barrage « .
1) Il s'agit de calculer $P(C \cap E)$
   On a: $P(C \cap E) = P(C) \times P_C(E) = 0{,}65 \times 0{,}70 = 0{,}455$
2) Il s'agit de calculer $P(\bar{C} \cap E) = P(\bar{C}) \times P_{\bar{C}}(E) = 0{,}35 \times 0{,}20 = 0{,}07$
3) La formule des probabilités totales donne :
   $P(E) = P(C \cap E) + P(\bar{C} \cap E) = 0{,}455 + 0{,}07 = 0{,}525$ .

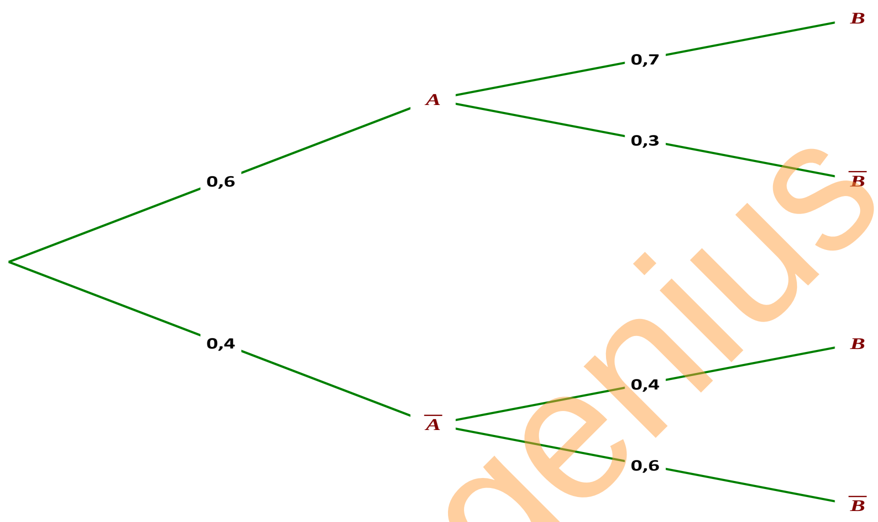
**Exercices d'approfondissement**
**Exercice**
Mariam, une jeune diplômée sans emploi, a reçu un fonds et décide d'ouvrir un restaurant. Après un mois d'activité, elle constate que pour un jour donné :
- La probabilité qu'il y ait une affluence de clients est de 0,6.
- Lorsqu'il y a une affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est de 0,7.
- Lorsqu'il n'y a pas d'affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est de 0,4.
On désigne par A l'évènement « il y a affluence de clients » et par B l'évènement « Mariam réalise un bénéfice ».
1) On choisit un jour au hasard.
a) Calcule la probabilité de l'évènement E « il y a affluence de clients et Mariam réalise un bénéfice »
b) Démontre que la probabilité P(B) de l'évènement B est égale à 0,58.

c) Mariam a réalisé un bénéfice. Calcule la probabilité qu'il y ait eu une affluence de clients ce jour-là. *(On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible)*

2) Mariam veut faire une prévision sur trois jours successifs donnés. On désigne par X le nombre de fois qu'elle réalise un bénéfice sur les trois jours successifs.
a) Détermine les valeurs prises par X.
b) Détermine la loi de probabilité de X. *(On donnera l'arrondi d'ordre 3 des résultats)*
c) Calcule l'espérance mathématique E(X) de X.

3) Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $P_n$ la probabilité que Mariam réalise au moins une fois un bénéfice pendant n jours successifs.
a) Justifie que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $Pn = 1- (0,42)^n$
b) Détermine la valeur minimale de n pour qu'on ait $P_n \geq 0,9999$.

**Solution**
**Etablissons un arbre pondéré**






1) a. **Calcul de *P* (*E*)**
E « il y a affluence de clients et Mariam réalise un bénéfice »
Ainsi E = A∩B. on a donc P(E) = P(A∩B) = P(A)×P(B/A)
= 0,6×0,7
= 0,42

b) Calcul de P(B)
$P(B)= P(A\cap B) + P(\bar{A}\cap B)$
$= P(A)\times P(B/A) + P(\bar{A})\times P(B/\bar{A})$
$= 0,6\times 0,7 + 0,4\times 0,4$
$= 0,42 + 0,16$
$= 0,58$

c) On sait que Mariam a réalisé un bénéfice. Calculer la probabilité qu'il y ait eu une affluence de clients ce jour-là, revient à calculer la probabilité de l'évènement A sachant B.

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0,42}{0,58} = \frac{42}{58} = \frac{21}{29}$$

2) a. Sur les trois jours Mariam peut ne jamais réaliser un bénéfice donc X prendra la valeur 0.
Sur les trois jours elle ne peut réaliser un bénéfice qu'un seul jour. X prendra la valeur 1,
Sur les trois jours elle peut réaliser un bénéfice sur deux jours, X prendra la valeur 2.
Et enfin sur les trois jours elle peut réaliser un bénéfice tous les jours. X prendra donc la valeur 3.
On a donc $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$.

b). X est une variable qui suit une loi binomiale de paramètres n = 3 et P = 0,58.

$P(X = 0) = C_3^0 \times (0{,}58)^0 \times (1 - 0{,}58)^3 = 0{,}074088 = 0{,}074$
$P(X = 1) = C_3^1 \times (0{,}58)^1 \times (1 - 0{,}58)^2 = 0{,}306936 = 0{,}307$
$P(X = 2) = C_3^2 \times (0{,}58)^2 \times (1 - 0{,}58)^1 = 0{,}423864 = 0{,}424$
$P(X = 3) = C_3^3 \times (0{,}58)^3 \times (1 - 0{,}58)^0 = 0{,}195112 = 0{,}195$

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | 0,074 | 0,307 | 0,424 | 0,195 |

c). **Calcul de E(X)**
$E(X) = n \times p = 3 \times 0{,}58 = 1{,}74$

3) a. **Calcul de $P_n$**
Soit l'évènement F : « Mariam réalise au moins une fois un bénéfice pendant n jours successifs », l'évènement contraire de F est l'évènement $\bar{F}$ « Mariam ne réalise aucun bénéfice pendant n jours successifs ».
On a $P(\bar{F}) = C_n^0 \times (0{,}58)^0 \times (1 - 0{,}58)^n$
$= (1 - 0{,}58)^n$
$= (0{,}42)^n$
Donc $P_n = p(F)$
$= 1 - P(\bar{F})$
$= 1 - (0{,}42)^n$
b) $P_n \geq 0{,}9999 \Leftrightarrow 1-(0{,}42)^n \geq 0{,}9999$
$\Leftrightarrow -(0{,}42)^n \geq 0{,}9999-1$
$\Leftrightarrow -(0{,}42)^n \geq -0{,}0001$
$\Leftrightarrow (0{,}42)^n \leq 0{,}0001$
$\Leftrightarrow n \times \ln(0{,}42) \leq \ln(0{,}0001)$
$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}0001)}{\ln(0{,}42)}$.
On a $\frac{\ln(0{,}0001)}{\ln(0{,}42)} \approx 10{,}61$, d'où $n \geq 10{,}61$.
La valeur minimale de n pour qu'on ait $P_n \geq 0{,}9999$ est donc 11.