



THEME : FONCTIONS NUMERIQUES

Durée : 12 heures

Code :

Leçon 1 : Limites et continuité d'une fonction

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Les élèves de Terminale s'exercent à la photographie au sein du club photo du lycée. On les informe qu'en photographie, la profondeur de champ correspond à la zone de l'espace dans laquelle doit se trouver le sujet à photographier pour en obtenir une image que l'œil considérera nette.

En optique, pour que la netteté s'étende d'une distance a à une distance r , la mise au point doit être faite à la distance : $P = \frac{2ar}{a+r}$ (les distances sont exprimées en mètres).

Les élèves souhaitent que la netteté s'étende de « 5m à l'infini ».

Un élève affirme alors que : $P = 10 - \frac{50}{5+r}$. Ce qui n'est pas de l'avis des autres.

Ensemble ils décident de vérifier cette formule et de faire des calculs pour déterminer la distance de mise au point à choisir quand l'objet s'éloigne.

B. CONTENU DE LA LEÇON

1. Limite d'une fonction composée

Propriété

Soit f et g deux fonctions numériques. a , b et ℓ sont des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = \ell$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = \ell$.

Exercice de fixation

1 Calcule la limite en $+\infty$ de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \sqrt{4 + \frac{2}{x^2+1}}$.

2. Calcule la limite en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$.

Solution

1. $h(x) = g \circ f(x)$ avec $f(x) = 4 + \frac{2}{x^2+1}$ et $g(x) = \sqrt{x}$

Nous avons: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4 + \frac{2}{x^2+1}\right) = 4$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x^2+1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x^2}\right) = 0$

et $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 2$.

2. $f(x) = \frac{\sin 2x}{x} = 2 \times \frac{\sin(2x)}{2x} = u \circ v(x)$ où $v(x) = 2x$ et $u(x) = 2 \times \frac{\sin x}{x}$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0} v(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \times \frac{\sin x}{x} = 2$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$.

2. Limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert

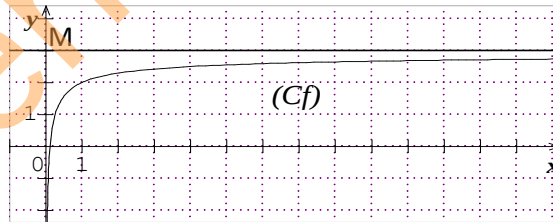
Propriété 1

a et b sont des éléments de

$\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ et f une fonction numérique.

Si f est croissante et majorée par un nombre réel M sur l'intervalle $]a, b[$ alors f admet une limite finie ℓ en b .

De plus $\ell \leq M$.



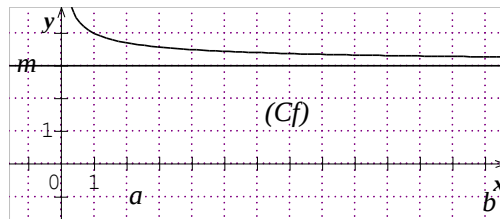
Propriété 2

a et b sont des éléments de

$\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ et f une fonction numérique.

Si f est décroissante et minorée par un nombre réel m sur l'intervalle $]a, b[$ alors f admet une limite finie ℓ en b .

De plus $\ell \geq m$.



Exercice de fixation

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Sachant que : $\forall x \in [1; +\infty[$, on a : $f(1) \leq f(x) \leq -\frac{1}{x} + 1 + f(1)$.

Justifie que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ et donne un encadrement de ℓ .

Solution

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$,

$$\forall x \in [1; +\infty[, \text{ on a : } f(1) \leq f(x) \leq -\frac{1}{x} + 1 + f(1).$$

$$\forall x \in [1; +\infty[, -\frac{1}{x} \leq 0 \text{ donc } f(x) \leq -\frac{1}{x} + 1 + f(1) \leq 1 + f(1).$$

La fonction f est croissante sur $[1; +\infty[$ et majorée par $1 + f(1)$ donc f admet une limite finie ℓ en $+\infty$. D'où : $f(1) \leq \ell \leq 1 + f(1)$.

3. Branches paraboliques

Définition

Soit f une fonction numérique et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O, I, J)

- On dit que (C) admet en $+\infty$ une **branche parabolique de direction celle de (OI)** lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$,
- On dit que (C) admet en $+\infty$ une **branche parabolique de direction celle de (OJ)** lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ (ou $-\infty$),

Remarque : On définit de manière analogue les branches paraboliques en $-\infty$.

Exercice de fixation

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{2}{x-1} - \sqrt{x+1}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

Démontre que (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OI) .

Solution

f est définie sur $[-1; 1[\cup]1; +\infty[$. On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} \right) = 0$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$.

D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

$\forall x \in]1; +\infty[, \frac{f(x)}{x} = \frac{2}{x^2-x} - \frac{\sqrt{x+1}}{x} = \frac{2}{x^2-x} - \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{x+1}}$. On a: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x^2-x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x^2} \right) = 0$.

On a: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$, de plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{x+1}} = 0$. On conclut que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, donc (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OI).

4. Continuité sur un intervalle

4.1-Définition

On dit qu'une fonction f est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout élément de I .

Exemple

Les fonctions polynôme, rationnelle, sinus, cosinus, racine carrée, puissance, valeur absolue et tangente sont continues sur tout intervalle inclus dans leurs ensembles de définition respectifs.

4.2-Prolongement par continuité

Propriété et définition

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f et a un nombre réel n'appartenant pas à D_f .

Si f admet une limite finie ℓ en a , alors on dit que f est prolongeable par continuité en a et la

fonction g définie sur $D_f \cup \{a\}$ par :
$$\begin{cases} \forall x \in D_f, g(x) = f(x) \\ g(a) = \ell \end{cases}$$

est continue en a et est appelée **le prolongement par continuité de f en a** .

Exemple

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

On a : $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}, g(x) = f(x) \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

est le prolongement par continuité de f en 0 .

Exercice de fixation

1. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x-9}{\sqrt{x-5}-2}$.

Démontre que f admet en 9 un prolongement par continuité φ , et définit le.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$ par : $g(x) = \frac{x^2+x}{x^2-|x|}$

g est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Justifie ta réponse.

Solution

$$1. D_f = \{ x \in \mathbb{R} / x - 5 \geq 0 \text{ et } \sqrt{x-5} - 2 \neq 0 \}$$

$$x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$$

$$\sqrt{x-5} - 2 = 0 \Leftrightarrow x - 5 = 4 \Leftrightarrow x = 9.$$

$$\text{Donc : } D_f = [5 ; 9[\cup]9 ; +\infty[.$$

$$\forall x \in D_f, f(x) = \frac{(x-9)(\sqrt{x-5}+2)}{(\sqrt{x-5}-2)(\sqrt{x-5}+2)} = \frac{(x-9)(\sqrt{x-5}+2)}{x-9} = \sqrt{x-5} + 2$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 9} f(x) = \lim_{x \rightarrow 9} (\sqrt{x-5} + 2) = 4$$

Ainsi, $9 \notin D_f$ et f admet une limite finie en 9. Donc f est prolongeable par continuité en 9.

La fonction φ est définie sur $[5 ; +\infty[$ par : $\varphi(9) = 4$ et $\forall x \in D_f, \varphi(x) = f(x)$ est le prolongement par continuité de f en 9.

Remarque: φ est définie sur $[5 ; +\infty[$ par: $\varphi(x) = \sqrt{x-5} + 2$.

2.

$$\text{Pour tout } x \in]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 0[; g(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + x} = 1$$

$$\text{On a donc } \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 1$$

$$\text{Pour tout } x \in]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[; g(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 - x} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\text{On a donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x-1} = -1$$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$, ainsi g n'admet pas de limite en 0, donc g n'est pas prolongeable par continuité en 0.

4.3- Image d'un intervalle par une fonction continue

Propriété 1

L'image d'un intervalle I par une fonction continue sur I est un intervalle ou un singleton.

Exercice de fixation

Détermine l'image de l'intervalle $]-\pi; \pi]$ par la fonction cosinus.

Solution

La fonction cosinus est continue sur $]-\pi; \pi]$

Or pour tout nombre réel x appartenant à $]-\pi; \pi]$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.

De plus $\cos(\pi) = -1$ et $\cos(0) = 1$.

Donc l'image de l'intervalle $]-\pi; \pi]$ par la fonction cosinus est $[-1; 1]$.

Propriété 2

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I , a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

Intervalle I	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I
$[a; b]$	$f([a; b]) = [f(a); f(b)]$	$f([a; b]) = [f(b); f(a)]$
$[a; b[$	$f([a; b]) = [f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$f([a; b]) =] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a)]$
$]a; b]$	$f(]a; b]) =] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b)]$	$f(]a; b]) = [f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
$]a; b[$	$f(]a; b]) =] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$f(]a; b]) =] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
$[a; +\infty[$	$f([a; +\infty]) = [f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$f([a; +\infty]) =] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(a)]$
$] -\infty; +\infty[$	$f(] -\infty; +\infty]) =] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$f(] -\infty; +\infty]) =] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$

Exercice de fixation

Le tableau de variation ci-dessous est celui d'une fonction f définie et continue sur les intervalles $] -\infty; 0[$ et $] 0; +\infty[$.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$

$f(x)$		
--------	--	--

Détermine l'image par f de chacun des intervalles suivants : $] -\infty ; -1]$, $]0 ; +\infty[$ et $[-1 ; 0[$.

Solution

- f est continue et strictement croissante sur $] -\infty ; -1]$ donc :
 $f(]-\infty ; -1]) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(-1) \right] =]-2 ; 5]$.
- f est continue et strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$ donc :
 $f(]0 ; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \right[=]1 ; +\infty[$.
- f est continue et strictement décroissante sur $[-1 ; 0[$ donc :
 $f([-1 ; 0[) = \left] \lim_{x \rightarrow 0} f(x); f(-1) \right[=]1 ; 5]$.

4.4-Opérations sur les fonctions continues

Propriété 1

Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I , alors :

- ✓ les fonctions $f + g$, fg , f^n ($n \in \mathbb{N}$) et $|f|$ sont continues sur I .
- ✓ si g ne s'annule pas sur I alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue sur I .
- ✓ si f est positive sur I alors fonction $\sqrt{f}$ est continue sur I .

Exercice de fixation

Soit g et h deux fonctions définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 + \sin x$ et $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

1) Justifie que g est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Justifie que h est continue sur $] -\infty ; -1]$.

Solution

1) g est la somme des fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto \sin x$ qui sont continues sur $\mathbb{R}$. Donc g est continue sur $\mathbb{R}$.

2) La fonction $x \mapsto x^2 - 1$ est continue et positive sur $] -\infty ; -1]$.

Donc h est continue sur $] -\infty ; -1]$.

Propriété 2

Si f est continue sur un intervalle I et g continue sur l'ensemble $f(I)$, alors $g \circ f$ est continue sur I .

Exercice de fixation

Soit g et f deux fonctions définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{1+x}{2+x}$ et $f(x) = \cos x$

Justifie que $g \circ f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Solution

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et $f(\mathbb{R}) = [-1; 1]$.

La fonction g est continue sur $[-1; 1]$

Donc la fonction $g \circ f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

5. Fonction continue et strictement monotone sur un intervalle

5.1-Propriétés

Propriété 1

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors :

- f est une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$.
- la bijection réciproque f^{-1} de f est continue et strictement monotone sur $f(I)$.
- f^{-1} a le même sens de variation que f .

Remarque : Les courbes représentatives de f et de f^{-1} dans le plan muni d'un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exercices de fixation

Exercice 1

Soit $f: [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^2}{1+x^2}$$

1. Démontre que f est une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle K que l'on précisera.

2. Déduis en le sens de variation de la bijection réciproque f^{-1} .

Solution

1. $D_f = [0; +\infty[$.

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$.

f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{2x(1+x^2) - 2x(x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$.

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) > 0$ car $\forall x \in]0; +\infty[$, $2x > 0$ et $(1+x^2)^2 > 0$.

f est donc continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$; par suite f est une bijection de $[0; +\infty[$ sur $f([0; +\infty[) = [0; 1[$.

2. f^{-1} est donc définie sur $[0; 1[$. f^{-1} a le même sens de variation que f , donc f^{-1} est strictement croissante sur $[0; 1[$.

Exercice 2

Soit la fonction $g: [1; 3] \rightarrow [0; 4]$

$$x \mapsto -x^2 + 2x + 3$$

1. Démontre que g est une bijection.
2. Détermine l'expression explicite de la bijection réciproque g^{-1} de g .

Solution

1. g est dérivable sur $[1;3]$. $\forall x \in [1;3], g'(x) = -2x + 2$.

x	1	3
$-2x + 2$	0	-

$$\forall x \in]1;3], g'(x) < 0$$

La fonction g est continue et strictement décroissante sur $[1;3]$ et $g([1;3]) = [g(3);g(1)] = [0;4]$
donc g est une bijection.

2. Soit $y \in [0;4]$. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1;3]$, on a les équivalences suivantes :

$$g(x) = y \Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 + y = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{4-y}, \text{ car pour } y \in [0;4], 1 + \sqrt{4-y} \in [1;3]$$

D'où la bijection réciproque g^{-1} est définie de $[0;4]$ sur $[1;3]$ par : $g^{-1}(x) = 1 + \sqrt{4-x}$.

Propriété 2 : Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux éléments de I .

Pour tout m compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation : $f(x) = m$
admet au moins une solution comprise entre a et b .

Corollaire 1

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I , a et b deux éléments de I .

Pour tout m compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation : $f(x) = m$
admet une unique solution comprise entre a et b .

Exercice de fixation

On donne ci-contre le tableau de variation d'une fonction f définie et continue sur $[-1;+\infty[$

1. Justifie que l'équation : $f(x) = -10$
admet une unique solution dans $[-1;+\infty[$.

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	5	$-\infty$

2. L'équation : $f(x) = 13$ admet-elle une solution dans $[-1; +\infty[$? Justifie ta réponse.

Solution

1. f est continue et strictement décroissante sur $[-1; +\infty[$, $f([-1; +\infty[) =]-\infty; 5]$ et $-10 \in]-\infty; 5]$ donc l'équation : $f(x) = -10$ admet une solution unique dans $[-1; +\infty[$.

2. $13 \notin]-\infty; 5]$ donc l'équation : $f(x) = 13$ n'admet pas de solution dans $[-1; +\infty[$.

Corollaire 2

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$ et si $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation : $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $]a; b[$.

Exercice de fixation

Démontre que l'équation : $x \in]0; 1[, 2x^3 + 3x - 1 = 0$ admet une unique solution α .

Solution

Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par : $f(x) = 2x^3 + 3x - 1$. f est dérivable sur $[0; 1]$.

Pour tout $x \in [0; 1]$, $f'(x) = 6x^2 + 3$. Par suite, pour tout $x \in [0; 1]$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $[0; 1]$.

$f(0) = -1$ et $f(1) = 4$.

f est continue et strictement croissante sur $[0; 1]$ et $f(0) \times f(1) < 0$,

donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; 1[$.

5.2. Valeur approchée de la solution α d'une équation

Méthodes pratiques de détermination d'une valeur approchée de la solution α d'une équation

L'équation : $x \in]0; 1[, 2x^3 + 3x - 1 = 0$ admet une unique solution α .

Donne une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

Solution

Posons $f(x) = 2x^3 + 3x - 1$

- **Méthode 1** : Méthode de balayage

Pour obtenir une valeur approchée de α à 10^{-1} près, on effectue un balayage de $[0; 1]$ avec un pas égal à 0,1 jusqu'à trouver les deux premiers nombres dont les images sont de signes contraires.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
$f(x)$	-1	-0,7	-0,38	-0,05	0,3

On a : $f(0,3) \times f(0,4) < 0$ donc $0,3 < \alpha < 0,4$.

Une valeur approchée de α à 10^{-1} près est 0,3.

• **Méthode 2 : Méthode de dichotomie**

f est une fonction dérivable et monotone sur l'intervalle $[a; b]$ tel que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires. Il existe α élément de $[a; b]$ tel que $f(\alpha) = 0$. Il s'agit de trouver un encadrement de α d'amplitude réduite. On procède comme suit :

- ✓ On calcule : $f(a)$ et $f(\frac{a+b}{2})$
- ✓ Si $f(a)$ et $f(\frac{a+b}{2})$ sont de signes contraires alors $\alpha \in [a, \frac{a+b}{2}]$
Si $f(a)$ et $f(\frac{a+b}{2})$ sont de même signe alors $\alpha \in [\frac{a+b}{2}; b]$
- ✓ On répète le même processus dans le nouvel intervalle trouvé auquel appartient α jusqu'à trouver un intervalle d'amplitude demandé.
- ✓

Appliquée à notre exercice, cette méthode donne ce qui suit :

- ✓ $f(0) = -1$ et $f(0,5) = 0,75$, donc $f(0)$ et $f(0,5)$ sont de signe contraires, par conséquent $\alpha \in [0; 0,5]$
- ✓ $f(0) = -1$ et $f(0,25) = -0,22$, donc $f(0)$ et $f(0,25)$ sont de même signe, par conséquent $\alpha \in [0,25; 0,5]$
- ✓ $f(0,25) = -0,22$ et $f(0,375) = 0,23$ donc $f(0,25)$ et $f(0,375)$ sont de signes contraires par conséquent $\alpha \in [0,25; 0,375]$
- ✓ $f(0,25) = -0,22$ et $f(0,3125) = -0,0014$ donc $f(0,25)$ et $f(0,3125)$ sont de même signe, par conséquent $\alpha \in [0,3125; 0,375]$
En finalement à l'ordre 1 on conclue que $\alpha \in [0,3; 0,4]$ d'où une valeur approchée de α à 10^{-1} près est 0,3.

6. Fonction racine $n^{\text{ième}}$, fonction puissance d'exposant rationnel

6.1-Fonction racine $n^{\text{ième}}$

Définition

Soit n un nombre entier naturel tel que $n \geq 2$.

La fonction racine $n^{\text{ième}}$ est la bijection réciproque de la fonction

$$f: [0; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[\\ x \mapsto x^n$$

La racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre réel positif ou nul x est notée $\sqrt[n]{x}$ ou $x^{\frac{1}{n}}$.

Conséquences :

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R}^+ \\ y = \sqrt[n]{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \mathbb{R}^+ \\ x = y^n \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, (\sqrt[n]{x})^n = x \text{ ou } (x^{\frac{1}{n}})^n = x \text{ et } \sqrt[n]{x^n} = x.$$

Exemples

$$x \in \mathbb{R}^+, x^3 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{5}; \quad x \in \mathbb{R}^+, x^2 = 7 \Leftrightarrow x = \sqrt[2]{7} = \sqrt{7}.$$

$$\sqrt[4]{16} = 2; \quad \sqrt[5]{120^5} = 120.$$

6.2-Puissance d'exposant rationnel d'un nombre réel strictement positif

Définition

Soit p un nombre entier relatif non nul et q un nombre entier naturel tel que $q \geq 2$.

Pour tout nombre réel a strictement positif, on pose : $a^{\frac{p}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p = (\sqrt[q]{a})^p = \sqrt[q]{a^p}$.

Exemple

Propriétés

Pour tous nombres rationnels r et r' non nuls et pour tous nombres réels strictement positifs a et b on a :

$$\begin{aligned} \blacksquare a^r \times a^{r'} &= a^{r+r'} & \blacksquare \frac{1}{a^r} &= a^{-r} & \blacksquare \frac{a^{r'}}{a^r} &= a^{r'-r} = \frac{1}{a^{r-r'}} \\ \blacksquare (a^r)^{r'} &= a^{rr'} & \blacksquare a^r \times b^r &= (ab)^r & \blacksquare \frac{a^r}{b^r} &= \left(\frac{a}{b}\right)^r \end{aligned}$$

Exercice de fixation

1. Soit a un nombre réel strictement positif. Mettre sous la forme a^α où α est un nombre rationnel,

les nombres réels suivants : $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}; \frac{a^3}{\sqrt{a^{0,4}}}; \sqrt[3]{a} \times \sqrt[4]{a}$.

2. Justifie que : $\frac{4 \times \sqrt[10]{8}}{\sqrt[5]{256}} = 2\sqrt{2}$.

3. Justifie que pour tous nombres réels a et b strictement positifs : $\sqrt[3]{\sqrt{a^5 b}} \times \sqrt[3]{\sqrt{ab^5}} = ab$.

Solution

$$\begin{aligned} 1. \text{ On a : } \sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}} &= \left(\left(a^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{8}}; \quad \frac{a^3}{\sqrt{a^{0,4}}} = \frac{a^3}{a^{\frac{2}{5} \times \frac{1}{2}}} = \frac{a^3}{a^{\frac{1}{5}}} = a^{3 - \frac{1}{5}} = a^{\frac{14}{5}}; \\ \sqrt[3]{a} \times \sqrt[4]{a} &= (a)^{\frac{1}{3}} \times (a)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = a^{\frac{7}{12}}. \end{aligned}$$

$$2. \text{ On a : } \frac{4 \times \sqrt[10]{8}}{\sqrt[5]{256}} = \frac{2^2 \times 2^{\frac{3}{10}}}{\left(2^{\frac{8}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{2+\frac{3}{10}}}{2^{\frac{8 \times \frac{1}{2}}{5}}} = \frac{2^{\frac{23}{10}}}{2^{\frac{4}{5}}} = 2^{\frac{23}{10}-\frac{4}{5}} = 2^{\frac{15}{10}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}.$$

$$3. \sqrt[3]{\sqrt{a^5b}} \times \sqrt[3]{\sqrt{ab^5}} = \left((a^5b)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} \times \left((ab^5)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} = a^{5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} b^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} b^{5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} \\ = a^{5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} b^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = a^{\frac{6}{6}} b^{\frac{6}{6}} = ab$$

C . SITUATIONS COMPLEXES

Situation 1

Des élèves de terminale étudient le refroidissement d'un objet porté à 210°C. L'étude du phénomène thermique conduit à $f(t) = \frac{200}{t} + 10$ où $f(t)$ désigne la température de l'objet en degrés Celsius (°C) à l'instant t (t est exprimé en minutes).

Les élèves effectuent un contrôle de la température de l'objet après chaque minute (le premier contrôle ayant lieu à l'instant $t = 1$). Ils n'arrivent pas à déterminer la température de l'objet après une très longue période de refroidissement.

En utilisant tes connaissances, détermine cette température.

Solution

Dans cet exercice, les élèves cherchent à déterminer la température après une longue période de refroidissement.

Pour déterminer la température de ce corps après une longue période de refroidissement

- J'utilise les limites de fonction.
- Je calcule la limite de la fonction donnée en $+\infty$
- J'interprète le résultat trouvé.

La température de l'objet en degrés Celsius (°C) à l'instant t est $f(t) = \frac{200}{t} + 10$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (f(t)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{200}{t} + 10 \right) = 10.$$

La température de ce corps après une longue période de refroidissement est de 10°C.

Situation 2

Les élèves du club photo de ton établissement s'exercent à la photographie. Ils savent qu'en photographie, la profondeur de champ correspond à la zone de l'espace dans laquelle doit se trouver le sujet à photographier pour en obtenir une image que l'œil considérera nette.

Ils savent également qu'en optique, pour que la netteté s'étende d'une distance a à une distance r , la mise au point doit être faite à la distance P moyenne harmonique des distances a et r (les distances sont exprimées en mètres)

Les élèves souhaitent que la netteté s'étende de «5m à l'infini ». Ils te sollicitent à cet effet.

En t'appuyant sur tes connaissances, détermine la distance de mise au point à choisir.

Solution

Dans cet exercice, les élèves souhaitent que la netteté s'étende de «5m à l'infini ».

Pour déterminer la distance de mise au point à choisir

- J'exprime P en fonction de a et r .
- J'utilise les limites de fonction.
- Je calcule la limite de la fonction correspondante en $+\infty$
- J'interprète le résultat trouvé.

P est la moyenne harmonique des distances a et r donc $\frac{2}{P} = \frac{1}{a} + \frac{1}{r}$ c'est-à-dire $P = \frac{2ar}{a+r}$.

Pour que la netteté s'étende de «5m à l'infini », la mise au point doit être faite à la distance : $P = \frac{10x}{5+x}$ pour x tendant vers $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{10x}{5+x} \right) = 10.$$

La distance de mise au point à choisir pour que la netteté s'étende de «5m à l'infini » est de 10 mètres.

D. EXERCICES RÉSOLUS

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O,I,J).

Exercice 1

La fonction f est continue sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ et a pour tableau de variation le tableau suivant :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-
$f(x)$	-2	5	1	$+\infty$

En utilisant ce tableau, donner les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(-2 + \frac{1}{x}\right); \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x^2); \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f\left(\frac{-1}{x}\right); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{2x-1}{x^2+x}\right).$$

SOLUTION

On a :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-2 + \frac{1}{x}\right) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -5$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(-2 + \frac{1}{x}\right) = 5$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x^2) = 1$.
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{-1}{x}\right) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f\left(\frac{-1}{x}\right) = -2$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1}{x^2+x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x}\right) = 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{2x-1}{x^2+x}\right) = +\infty$.

Exercice 2

Calcule les limites suivantes $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin(x^5)}{x}\right)$.

SOLUTION

Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{|x| \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) \\ &= -1. \end{aligned}$$

Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin(x^5)}{x}\right)$

On rappelle que $\forall T \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(T) \leq 1$. En particulier $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(x^5) \leq 1$.

Pour $x > 0$, $\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin(x^5)}{x} \leq \frac{1}{x}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{x}\right) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin(x^5)}{x}\right) = 0$.

Exercice 3

Soit la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = E(x) + (x - E(x))^2$ où $E(x)$ désigne la partie entière du nombre réel x .

1. Soit n un entier relatif.

Justifie que la fonction k est continue en n .

2. Justifie que la fonction k est continue sur $\mathbb{R}$.

Solution

La fonction k est définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = E(x) + (x - E(x))^2$ où $E(x)$ désigne la partie entière du nombre réel x .

1. n étant un entier relatif, $k(n) = E(n) + (n - E(n))^2 = n - 0 = n$.

Calculons la limite de k à gauche en n .

Pour $n - 1 \leq x < n$, $E(x) = n - 1$ donc $k(x) = n - 1 + (x - n + 1)^2$.

$$\lim_{x \rightarrow n^-} k(x) = n - 1 + (n - n + 1)^2 = n$$

Calculons la limite de k à droite en n .

Pour $n \leq x < n + 1$, $E(x) = n$ donc $k(x) = n + (x - n)^2$.

$$\lim_{x \rightarrow n^+} k(x) = n + (n - n)^2 = n.$$

On a : $\lim_{x \rightarrow n^-} k(x) = \lim_{x \rightarrow n^+} k(x) = k(n)$, donc la fonction k est continue en n .

Exercice 4

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$.

1. Calcule la limite de f en $+\infty$ puis interprète graphiquement le résultat.
2. Démontre que la droite (D) d'équation $y = -2x - \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe représentative (C_f) de f en $-\infty$.
3. Etudie la position de (C_f) par rapport à (D).

Solution

$$\begin{aligned} 1. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} - x)(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{x(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Interprétation graphique : la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est asymptote horizontale à la représentation graphique (C_f) de f en $+\infty$.

2. Montrons que la droite (D) d'équation $y = -2x - \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe représentative (C_f) de f en $-\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x + \frac{1}{2}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2}) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} - x)(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} + \frac{1}{2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} + \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{x(-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1)} + \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1} + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0. \end{aligned}$$

Donc la droite (D) d'équation $y = -2x - \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe représentative (C_f) de f en $-\infty$.

3. Etudions la position de (C_f) par rapport à (D).

$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ et une équation de (D) est $y = -2x - \frac{1}{2}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > (x + \frac{1}{2})^2$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + x + 1} > |x + \frac{1}{2}|$ c'est-à-dire :

$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + x + 1} > x + \frac{1}{2}$ et $\sqrt{x^2 + x + 1} > -2x - \frac{1}{2}$.

Par suite $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > -2x - \frac{1}{2}$ donc (C_f) est au-dessus de la droite (D).

Exercice 5

Partie A. g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

1. Calcule les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
3. Démontre que l'équation $x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $1,6 < \alpha < 1,7$.
4. Démontre que : $\forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$

Partie B. f est la fonction définie sur $] -1; +\infty [$ par : $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J). L'unité graphique est 2 cm.

1. Calcule les limites de f en -1 et en $+\infty$ puis interpréter graphiquement les résultats.
- 2.a) Démontre que : $\forall x \in] -1; +\infty [, f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}$.
- b) Etudie les variations de f et dresser son tableau de variation.
- c) Donne une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
- d) Etudie la position de (C) par rapport à (T).
3. Trace (T) et (C).

Solution

Partie A Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 3x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 3x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty.$$

2. g est dérivable sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 6x^2 - 6x$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

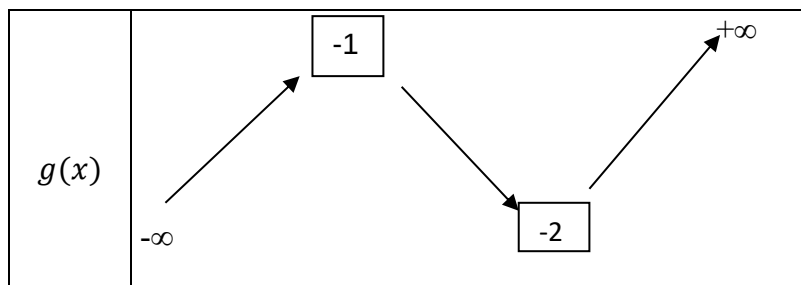
$$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[, g'(x) > 0$$

$$\forall x \in]0; 1[, g'(x) < 0$$

On en déduit que : g est strictement croissante sur $] -\infty ; 0]$ et sur $[1; +\infty [$, g est strictement décroissante sur $[0; 1]$

Tableau de variation de g .

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$		
$g'(x)$		+	0	-	0	+



4. - La fonction g est dérivable sur $] -\infty ; 1]$, et g' s'annule en 0.

Par ailleurs, pour tout $x \in]-\infty; 0[$, $g'(x) > 0$ et pour tout $x \in]0; 1[$, $g'(x) < 0$

Par suite $g(0)$ est le maximum de g sur $] -\infty ; 1]$.

D'où : $\forall x \in] -\infty ; 1]$, $g(x) \leq g(0)$ et comme $g(0) < 0$, finalement, $\forall x \in] -\infty ; 1]$, $g(x) < 0$.

- La fonction g est continue et strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$; $g([1; +\infty[) = [-2; +\infty[$,

Or $0 \in [-2; +\infty[$, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1; +\infty[$.

On conclut : l'équation $x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$ admet une solution unique α .

1,6 et 1,7 appartiennent à $[1; +\infty[$; $g(1,6) \approx -0,49$ et $g(1,7) \approx 0,16$;

$g(1,6) \times g(1,7) < 0$ donc $1,6 < \alpha < 1,7$.

4. - Il a été démontré à la question 3) que $\forall x \in] -\infty ; 1]$, $g(x) < 0$.

- La fonction g est continue et strictement croissante sur $[1; \alpha[$ et sur $] \alpha ; +\infty[$, d'où :

$g([1; \alpha[) = [-2; 0[$ et $g(] \alpha ; +\infty[) =]0 ; +\infty[$ donc :

$\forall x \in [1; \alpha[$, $g(x) < 0$ et $\forall x \in] \alpha ; +\infty[$, $g(x) > 0$.

On conclut :

$\forall x \in] -\infty ; \alpha[$, $g(x) < 0$ $\forall x \in] \alpha ; +\infty[$, $g(x) > 0$

Partie B

1. Limite en -1 :

Pour tout $x > -1$, $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3} = \frac{1}{1+x^3} (1-x)$

pour $x > -1$, on a $x^3 > -1$, soit $x^3 + 1 > 0$, par suite $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{1+x^3} = +\infty$

et comme $\lim_{x \rightarrow -1} (1-x) = 2$ alors $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$

Donc la droite d'équation $x = -1$ est asymptote à (C).

* **Limite en $+\infty$**

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{1+x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2} = 0$

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à (Cf) en $+\infty$.

2. a) f est dérivable sur $] -1; +\infty[$,

$$\forall x \in] -1; +\infty[, f'(x) = \frac{-(1+x^3)-3x^2(1-x)}{(1+x^3)^2} = \frac{-1-x^3-3x^2+3x^3}{(1+x^3)^2} = \frac{2x^3-3x^2-1}{(1+x^3)^2} = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}$$

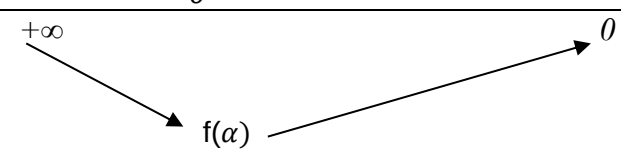
b) $\forall x \in] -1; +\infty[$, $(1+x^3)^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ déterminé à la fin de

la partie A , par suite :

$\forall x \in]-1; \alpha[, f'(x) < 0$; $\forall x \in]\alpha; +\infty[, f'(x) > 0$ et $f'(\alpha) = 0$.

On en déduit que f est strictement décroissante sur $] -1; \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha ; +\infty[$.

Tableau de variation de f ,

X	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$		$+\infty$ 	0

c) Une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$f'(0) = -1 ; f(0) = 1.$$

Ainsi une équation de la tangente (T) est : $y = -x + 1$.

$$d) \text{ Pour tout } x > -1 , f(x) - (-x + 1) = \frac{x^2 - x}{1 + x^3} = \frac{x(x-1)}{1 + x^3}$$

$\forall x \in] -1; +\infty [, 1 + x^3 > 0$ donc le signe de $f(x) - (-x + 1)$ est celui de $x(x - 1)$.

$$f(x) - (-x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

$\forall x \in] -1 ; 0[\cup]1; +\infty [, f(x) - (-x + 1) > 0$ et $\forall x \in] 0; 1[, f(x) - (-x + 1) < 0$

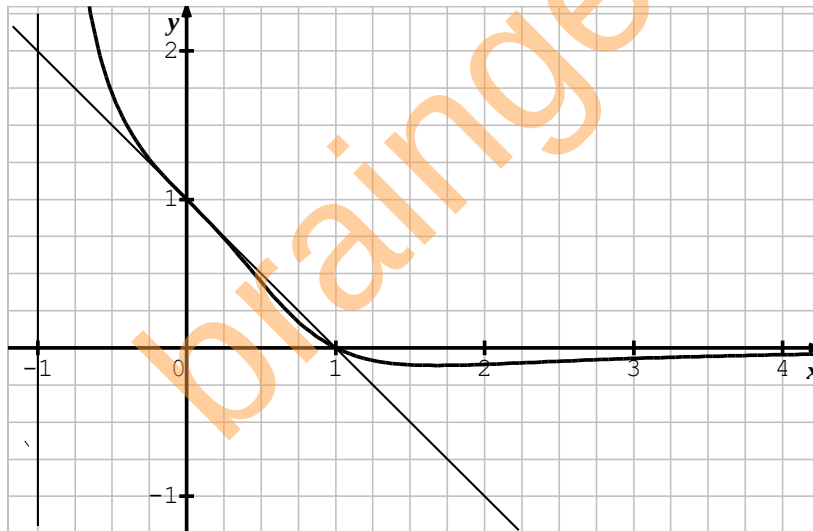
On en déduit que :

(C) est au-dessus de (T) sur $] -1 ; 0[\cup]1; +\infty [$,

(C) est au-dessous de (T) sur $]0 ; 1[$

(C) et (T) se coupent aux points d'abscisses 0 et 1.

3. Représentation graphique de (T) et (C).



E. EXERCICES

I – EXERCICES DE FIXATION

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O,I,J).

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Détermine les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

a) $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x}$;

b) $f(x) = \sqrt{x^2+x-2} + x - 1$;

c) $f(x) = \sqrt{2x^2+1} - x + 3$;

d) $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+2}$;

e) $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$;

f) $f(x) = x \cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$;

g) $f(x) = \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2+\sqrt{x^2+1}}$;

h) $f(x) = \sqrt{2x^2+1} - x + 3$.

Exercice 2

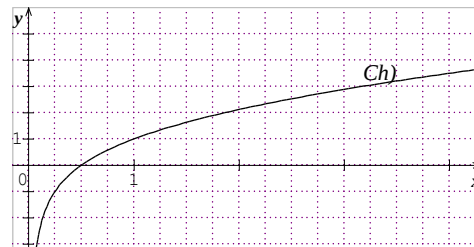
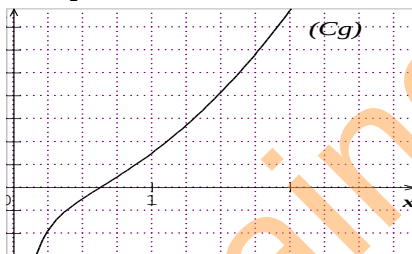
Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{4x^2+x}$ et (C_f) sa courbe représentative dans le repère (O,I,J).

Démontre que la droite d'équation y

$$= 2x - \frac{1}{4} \text{ est une asymptote oblique à } (C_f) \text{ en } +\infty$$

Exercice 3

Soit g et h les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 2x^2 - \frac{1}{2x}$ et $h(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x}}$, dont les courbes représentatives sont données ci-dessous :



Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x}$.

Interprète graphiquement les résultats

Exercice 4

On considère les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = \frac{x-1}{2+\sqrt{x}} \text{ et } g(x) = \sqrt{x^2+1} - 3x^2.$$

On note (C_f) et (C_g) les courbes représentatives de f et g .

1. Démontre que (C_f) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3$ et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

- b) Etudie les variations de f et dresser son tableau de variation.
2. a) Démontre que l'équation : $x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ admet une solution unique α et que $3 < \alpha < 4$.
- b) Donne une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
3. Trace (C_f) .

Exercice 11

Soit $f:]-\infty; -\frac{1}{2}[\rightarrow]\frac{1}{2}; +\infty[$

$$x \mapsto \frac{x-3}{2x+1}$$

(C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1. Démontre que f est une bijection et détermine sa bijection réciproque f^{-1} .
2. Trace la représentation graphique de f , puis déduis en celle de f^{-1} .

Exercice 12

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 2x - 2$.

1. a) Démontre que l'équation : $x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$ admet une solution unique α .
- b) démontre : $0,77 < \alpha < 0,78$.

2. Démontre que :

$$\forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0, \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0.$$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$ par : $f(x) = x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) . Unité : 2 cm.

1. Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- 2.a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) .
- b) Etudie la position de (C) par rapport à (D) .
- 3.a) Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$
- b) Dresse son tableau de variation.
- c) Donne une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
4. Trace (T) , (D) et (C) .

Exercice 13

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ par $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$, de courbe représentative (C_f) .

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 4$.
- a) Etudie le sens de variation de g et calcule ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
- b) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$

une unique solution notée α .

c) Donne un encadrement de α d'amplitude 0,1.

d) Déduis en le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .

2. a) Détermine les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Détermine les limites de f à gauche et à droite en -1 et en 1.

Interprète graphiquement les résultats obtenus

c) Montre que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$,

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$$

d) Déduis en les variations de f et dresser son tableau de variation.

3. a) Détermine les nombres réels a, b, c et d tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$,

$$f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2-1}.$$

b) Déduis en que (C_f) admet une asymptote oblique (D) d'équation $y = x + 2$.

c) Etudie la position relative de (C_f) et (D).

d) Montre que les abscisses des points B et B' où (C_f) admet une tangente parallèle à (D) sont $2 + \sqrt{3}$ et $-2 - \sqrt{3}$

4. Donne une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 2.

5. Détermine les points d'intersection de (C_f) avec la droite (OI).

6. Trace (C_f) et la tangente (T).