

PROPOSITION DE CORRIGÉ EPREUVE DE
MATHÉMATIQUES BACC ESG SÉRIE C/E.
Session 2022.

Par M. Nathanaël AMONO-MESSI
PLEG Maths

Partie A. EVALUATION DES RESSOURCES.

EXERCICE 1.

1. Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 + 2 - 2i\sqrt{3} = 0$,

$$z^2 + 2 - 2i\sqrt{3} = 0 \Rightarrow z^2 - (-2 + 2i\sqrt{3}) = 0$$

$$\Rightarrow z^2 - (1 + i\sqrt{3})^2 = 0 \Rightarrow [z - (1 + i\sqrt{3})][z + (1 + i\sqrt{3})] = 0$$

$$\Rightarrow z - (1 + i\sqrt{3}) = 0 \text{ ou } z + (1 + i\sqrt{3}) = 0$$

$$\Rightarrow z = 1 + i\sqrt{3} \text{ ou } z = -1 - i\sqrt{3}.$$

$$\text{Ainsi, } S_{\mathbb{C}} = \{-1 - i\sqrt{3}; 1 + i\sqrt{3}\} \quad \text{0,75pt}$$

2. (a) Donnons les éléments caractéristiques de S.

L'écriture complexe de S est sous la forme $z' = az + b$ avec $a = 1 - i\sqrt{3}$ et $b = 0$.

$$\bullet \text{ De plus } a = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

$$\arg(a) = -\frac{\pi}{3}; |a| = 2$$

donc S est la similitude directe de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

$\bullet b = 0 \Rightarrow$ le centre de S est le point O

S est la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. 0,75pt

(b) Images par S des points A et B.

$$\text{Nous avons: } z'_A = (1 - i\sqrt{3})z_A = (1 - i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3})$$

$$= 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 4 = z_F, \text{ donc } S(A) = F. \quad \text{0,25pt}$$

De même: $z'_B = (1-i\sqrt{3})z_B = (1-i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3}) = -(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3}) = -4 = z'_G$

donc $S(B) = G$. 0,25pt

3.(a) Déterminons une équation de l'image $(\mathcal{E}')$ de $(\mathcal{E})$ par la similitude S .

• $(\mathcal{E})$ est une ellipse de centre O , d'excentricité $e = \frac{1}{2}$, de foyers A et B ;

• S est la similitude directe de centre O

donc $(\mathcal{E}')$ est une ellipse de centre O , d'excentricité $e = \frac{1}{2}$, de foyers $S(A) = F$ et $S(B) = G$

Dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on a: $F\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $G\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ainsi, avec les notations habituelles $c = 4$.

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 2c = 2 \times 4 = 8 \text{ et } b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}.$$

Si $H(x, y)$ est un point de $(\mathcal{E}')$, alors l'équation de $(\mathcal{E}')$ dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est: $\frac{x^2}{8^2} + \frac{y^2}{(4\sqrt{3})^2} = 1$

C'est-à-dire $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$. 1pt

(b) Construisons $(\mathcal{E}')$, puis $(\mathcal{E})$ dans le même repère.

(Voir figure en Annexe)

1pt

4. Probabilité pour que Aïcha ait choisi deux points de l'axe focal de $(\mathcal{E}')$.

- L'axe focal de $(\mathcal{E}')$ est l'axe qui passe par les points G, O et F;
- les points O, A, B, F et G étant distincts, aucun point ne présente un avantage sur un autre : Il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.
la probabilité le premier point de l'axe focal de $(\mathcal{E}')$ est $P_1 = \frac{3}{5}$;
celle de choisir le deuxième point est $P_2 = \frac{2}{4}$. (tirage sans remise)
- la probabilité qu'elle ait choisi deux points de l'axe focal de $(\mathcal{E}')$ est $p = P_1 \times P_2 = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = 0,3$. 1pt

EXERCICE 2.

1.(a) Démontrons que E_K est un sous-espace vectoriel de E .

$$E_K = \{ \vec{u} \in E \mid f(\vec{u}) = K \vec{u} \}$$

(i) Montrons que $E_K \neq \emptyset$.

$$\text{On a : } \vec{0}_E \in E \text{ et } f(\vec{0}_E) = \vec{0}_E, \text{ Car } f \text{ est un endomorphisme de } E \\ = K \cdot \vec{0}_E$$

donc $\vec{0}_E \in E_K$ et par conséquent $E_K \neq \emptyset$.

(ii) Montrons que E_K est stable par combinaison linéaire.

Soit $\vec{u}, \vec{v} \in E_K$; Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v}), \text{ Car } f \text{ est linéaire} \\ = \alpha K \vec{u} + \beta K \vec{v}, \text{ par définition de } f \\ = K(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}), \text{ donc } \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \in E_K. \text{ 1pt}$$

De (i) et (ii), il en découle que E_K est un S.E.V de E .

(b) On suppose que f vérifie l'égalité $f \circ f = 2f$.
Démontrons que $\vec{u} \in \text{Im} f \Leftrightarrow \vec{u} \in E_2$.

• Supposons que $\vec{u} \in \text{Im} f$, alors il existe $\vec{v} \in E$ tel que $f(\vec{v}) = \vec{u}$.

$$f(\vec{v}) = \vec{u} \Rightarrow f(f(\vec{v})) = f(\vec{u})$$

$$\Rightarrow f \circ f(\vec{v}) = f(\vec{u})$$

$$\Rightarrow 2f(\vec{v}) = f(\vec{u}), \text{ Car } f \circ f = 2f$$

$$\Rightarrow 2\vec{u} = f(\vec{u})$$

$$\Rightarrow \vec{u} \in E_2.$$

0,5pt

• Réciproquement, Supposons que $\vec{u} \in E_2$.

$$\vec{u} \in E_2 \Rightarrow f(\vec{u}) = 2\vec{u}$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{2} f(\vec{u}) = f\left(\frac{1}{2}\vec{u}\right)$$

$$= f(\vec{v}) \text{ avec } \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{u} \in E$$

$$\Rightarrow \vec{u} \in \text{Im} f.$$

$$\text{d'où } \vec{u} \in \text{Im} f \Leftrightarrow \vec{u} \in E_2.$$

0,5pt

2. (a) Démontrons que $f(\vec{i}) = 2\vec{i}$; $f(\vec{j}) = 2\vec{j}$ et $f(\vec{k}) = -2\vec{i} + 2\vec{j}$.

$$\text{On a: } \begin{cases} f(\vec{i} + \vec{j}) = 2\vec{i} + 2\vec{j} \\ f(\vec{i} - \vec{j}) = 2\vec{i} - 2\vec{j} \end{cases}, \text{ donc } \begin{cases} f(\vec{i}) + f(\vec{j}) = 2\vec{i} + 2\vec{j} \\ f(\vec{i}) - f(\vec{j}) = 2\vec{i} - 2\vec{j} \end{cases}$$

$$\text{Ceci étant: } 2f(\vec{i}) = 4\vec{i} \text{ et } 2f(\vec{j}) = 4\vec{j}$$

$$\text{et par suite: } f(\vec{i}) = 2\vec{i}; f(\vec{j}) = 2\vec{j}.$$

$$\bullet f(\vec{i} - \vec{j}) + f(\vec{k}) = \vec{0} \Rightarrow f(\vec{k}) = -f(\vec{i} - \vec{j})$$

$$= -(2\vec{i} - 2\vec{j}) = -2\vec{i} + 2\vec{j}.$$

0,25pt x 3

b) Donnons la matrice M de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

la matrice M de f est entièrement déterminée par les images des vecteurs de base disposés en colonnes, donc :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{0,5pt}$$

c) Démontrons que $f \circ f = 2f$.

Il suffit de montrer que $M \times M = 2M$.

$$\begin{aligned} 2M &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad M \times M = M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comme $M \times M = 2M$, on conclut que $f \circ f = 2f$. 0,5pt

d) Déterminons par une de ses bases, le noyau de f.

$$\text{Ker } f = \{ \vec{u} \in E \mid f(\vec{u}) = \vec{0}_E \}$$

Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ un vecteur de E.

$$\bullet \vec{u} \in \text{Ker } f \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{0}_E \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases}$$

$$\bullet \vec{u} \in \text{Ker } f \Rightarrow \vec{u} = z\vec{i} - z\vec{j} + z\vec{k} = z(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = z\vec{e}_1 \text{ avec } \vec{e}_1 = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

Comme $\vec{e}_1 \neq \vec{0}$, alors $\text{Ker } f$ est une droite vectorielle dont une base est $\vec{e}_1 = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. 0,5pt

(e) Déterminons l'image $\text{Im} f$ de f .

Nous venons de voir d'après la question 2.c) que $f \circ f = 2f$, ainsi, d'après la question 1.b), on en déduit que $\text{Im} f = E_2$.

$$E_2 = \{ \vec{u} \in E \mid f(\vec{u}) = 2\vec{u} \}.$$

$$\text{Soit } \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \in E, \quad ; \quad \vec{u} \in \text{Im} f \Leftrightarrow f(\vec{u}) = 2\vec{u} \\ \Leftrightarrow \vec{u} = \frac{1}{2} f(\vec{u})$$

$$\begin{aligned} \text{Comme } f(\vec{u}) &= f(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = x f(\vec{i}) + y f(\vec{j}) + z f(\vec{k}) \\ &= x(2\vec{i}) + y(2\vec{j}) + z(-2\vec{i} + 2\vec{j}) \\ &= 2(x-z)\vec{i} + 2(y+z)\vec{j} \end{aligned}$$

$$\text{alors } \vec{u} = (x-z)\vec{i} + (y+z)\vec{j}.$$

Ainsi, $\text{Im} f$ est un plan vectoriel dont une base est $(\vec{i}, \vec{j})$. 0,75pt

EXERCICE 3.

1. Démontrons que $f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0$.

f est une fonction 2-fois dérivable sur $[0, 2\pi]$ et pour tout $x \in [0, 2\pi]$, $f'(x) = (e^{-x} \cos x)' = (e^{-x})' \cos x + (\cos x)' e^{-x} = -e^{-x} \cos x - \sin x e^{-x}$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -(-e^{-x} \cos x - \sin x e^{-x}) - (\sin x e^{-x})' \\ &= e^{-x} \cos x + e^{-x} \sin x - (e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x) \\ &= 2e^{-x} \sin x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) &= 2e^{-x} \sin x + 2(-e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x) + 2e^{-x} \cos x \\ &= 0. \end{aligned}$$

0,5pt

2. Étudions les variations de f et dressons son tableau de variations.

- $f(0)=1$. $f(2\pi)=e^{-2\pi}$

- f est continue et dérivable sur $[0; 2\pi]$ et pour tout $x \in [0; 2\pi]$,

$$f'(x) = -e^{-x}(\cos x + \sin x)$$

- pour tout $x \in [0; 2\pi]$, $e^{-x} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-\cos x - \sin x$.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow -\cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} - x + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$x \backslash k$	0	1	2
$-\frac{\pi}{4} + k\pi$	///	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$

Dans $[0; 2\pi]$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$.

x	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	
$f'(x)$	-	o	+	o	-

Ainsi, f est strictement décroissante sur $[0; \frac{3\pi}{4}[$ et sur $]\frac{7\pi}{4}; 2\pi]$
 f est strictement croissante sur $]\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}[$.

x	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$f(x)$	1	-	+	-
f		$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{7\pi}{4}}$	$e^{-2\pi}$

1,25pt

3.(a) Démontrons qu'on a $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$.

Pour tout $x \in [0, 2\pi]$, $-1 \leq \cos x \leq 1$

En multipliant chaque membre de la double inégalité ci-dessus par $e^{-x} > 0$, on obtient $-e^{-x} \leq e^{-x} \cos x \leq e^{-x}$

c'est-à-dire $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$.

0,5pt

(b) Déterminons les coordonnées des points d'intersection de (C_f) avec les courbes d'équations $y = e^{-x}$ et $y = -e^{-x}$.

• Avec la courbe d'équation $y = e^{-x}$.

$$f(x) = e^{-x} \Rightarrow e^{-x} \cos x = e^{-x} \Rightarrow \cos x = 1 \text{ car } e^{-x} \neq 0.$$

Dans $[0, 2\pi]$, $\cos x = 1 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2\pi$.

• Avec la courbe d'équation $y = -e^{-x}$.

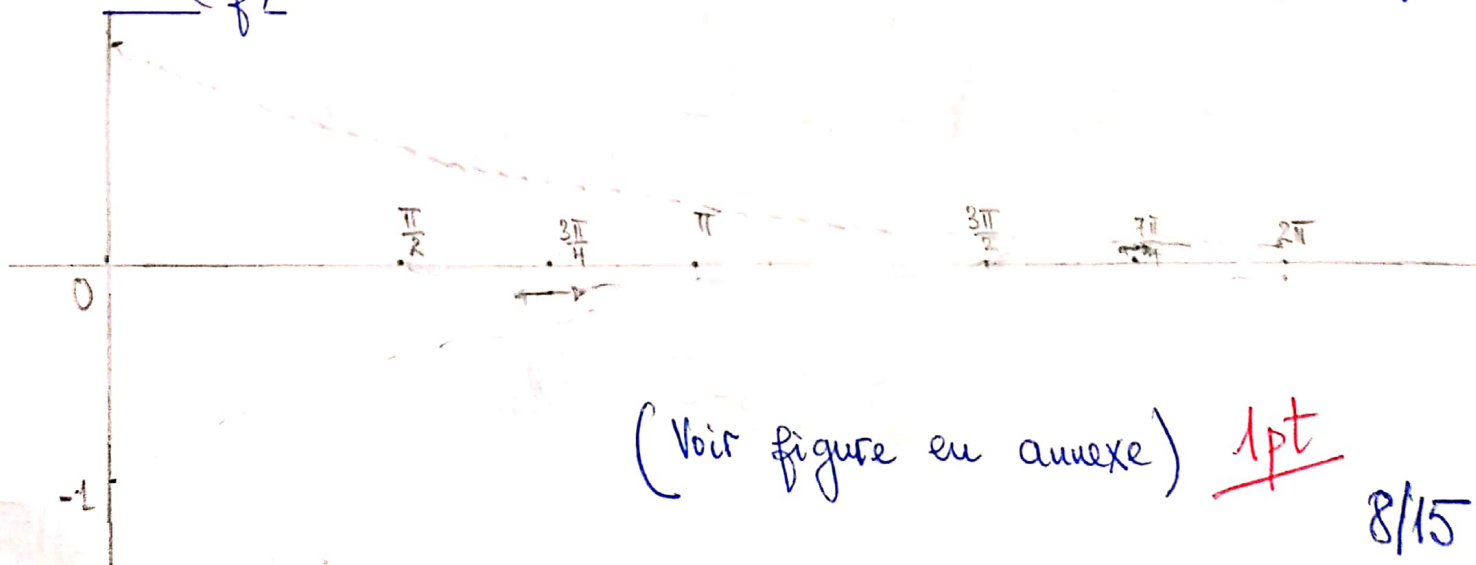
$$f(x) = -e^{-x} \Rightarrow e^{-x} \cos x = -e^{-x} \Rightarrow \cos x = -1 \text{ car } e^{-x} \neq 0.$$

Dans $[0, 2\pi]$, $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$.

0,2pt x 3

les points d'intersection cherchés sont $(0, 1)$, $(2\pi, e^{-2\pi})$ et $(\pi, -e^{-\pi})$

(c) Traçons dans le même repère, les courbes d'équations $y = e^{-x}$, $y = -e^{-x}$ et (C_f)



(Voir figure en annexe) 1pt

8/15

PARTIE B. EVALUATION DES COMPÉTENCES.

Tâche 1. Déterminons en combien d'années le gisement A sera épuisé.

Soit U_t la quantité totale de gaz (en milliards de m^3) extraite du gisement A à l'année t .

- la quantité de gaz extraite chaque année augmente de 0,75 milliards de m^3 par rapport à celle de l'année précédente

signifie que $U_{t+1} = U_t + 0,75$

donc (U_t) est une suite arithmétique de raison 0,75 et de 1^{er} terme $U_1 = 5,01$ milliards de m^3 .

$$\text{Ainsi, pour tout } t \geq 1, \quad U_t = U_1 + 0,75(t-1) \\ = 5,01 + 0,75(t-1)$$

- le gisement A s'épuisera lorsque $U_1 + U_2 + \dots + U_t = 100$

$$\text{C'est-à-dire } \frac{t(U_1 + U_t)}{2} = 100$$

$$\text{ce qui donne } t(5,01 + 5,01 + 0,75(t-1)) = 200$$

$$\text{ce qui équivaut à : } 0,75t^2 + 9,27t - 200 = 0.$$

$$\Delta = 685,9329. \quad \sqrt{\Delta} = 26,2.$$

$$\text{la solution positive est } t = \frac{-9,27 + 26,2}{2(0,75)} \approx 11,28$$

le gisement A s'épuisera en 12 années

1,5 pt
C₁
C₂
C₃

10/15

Tâche 2 Nombre d'années d'extraction suffisant à ce pays pour épuiser le contenu du gisement B.

- Soit $q(t)$ la quantité totale (en milliards de m^3) de gaz extraite du gisement B à la date t .
- Au niveau du gisement B, le taux d'extraction du gaz à la date t est $q'(t)$.

Le taux est $\left(\frac{1}{2t+1} + 0,02t\right)$ milliards de m^3 par an signifie que $q'(t) = \frac{1}{2t+1} + 0,02t$.

- Déterminons $q(t)$ (Contenu du gisement B)

$$q'(t) = \frac{1}{2t+1} + 0,02t \quad (\Rightarrow) \quad q(t) = \int \left(\frac{1}{2t+1} + 0,02t \right) dt = \int \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2t+1} + 0,02t \right) dt \\ = \frac{1}{2} \ln(2t+1) + 0,01t^2 + C$$

$$q(0) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad C = 0.$$

$$\text{Ainsi } q(t) = \frac{1}{2} \ln(2t+1) + 0,01t^2.$$

- le contenu du gisement B sera épuisé lorsque $q(t) = 100$.
Ceci revient à résoudre dans $[0; +\infty[$ l'équation $\frac{1}{2} \ln(2t+1) + 0,01t^2 = 100$.

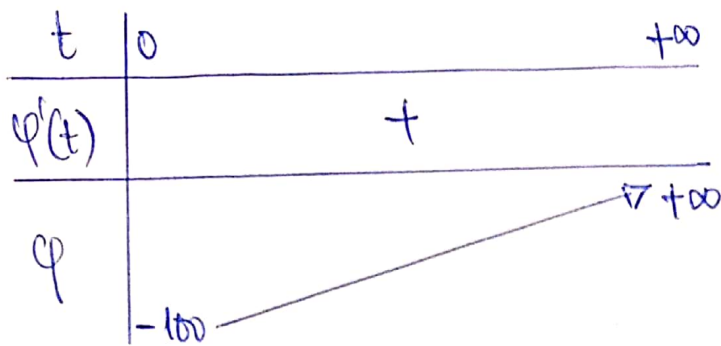
Considérons la fonction φ définie sur $[0; +\infty[$ par $\varphi(t) = \frac{1}{2} \ln(2t+1) + 0,01t^2 - 100$.

$$\varphi(0) = -100 \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = +\infty$$

φ est continue et dérivable sur $[0; +\infty[$ comme somme de fonctions continues et dérivables sur $[0; +\infty[$ et pour tout $u \in [0; +\infty[$,

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2t+1} + 0,02t > 0$$

donc φ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.



- L'étude des variations de φ montre que φ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc φ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ vers $[-100, +\infty[$.

De plus, $0 \in [-100, +\infty[$, donc il existe un unique réel $t_0 \in [0, +\infty[$ tel que $\varphi(t_0) = 0$.

D'où l'équation $\varphi(t) = 0$ admet une solution unique dans $[0, +\infty[$.

$$\varphi(98) = -1,32 ; \varphi(99) \approx 0,66$$

Comme $\varphi(98) \times \varphi(99) < 0$, alors d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $98 < t_0 < 99$.

t	98	98,1	98,2	98,3	98,4	98,5	98,6	98,7	98,8	98,9	99
$\varphi(t)$	-1,32						-0,136	0,063			0,66

- $\frac{98,6 + 98,7}{2} = 98,65$ et $\varphi(98,65) \approx -0,037$, donc $98,65 < t_0 < 98,7$.
- $\frac{98,65 + 98,7}{2} = 98,675$ et $\varphi(98,675) \approx 0,013$, donc $98,65 < t_0 < 98,675$.
- $\frac{98,65 + 98,675}{2} = 98,6625$ et $\varphi(98,6625) \approx -0,012$, donc $t_0 = 98,67$.

le nombre d'années d'extraction suffisant à ce pays est de 99 ans

12/15

Tâche 3 Nombre d'années qu'il faudra à ce pays pour vider le gisement C de son contenu.

- Soit $q(t)$ la quantité totale (en milliards de m^3) de gaz extraite du gisement C à la date t .
- Au niveau du gisement C, les taux d'extraction (aux dates t) sont proportionnelles aux quantités de gaz extraites à ces dates. $\Rightarrow$ signifient que $q'(t) = a q(t)$, où $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} q'(t) = a q(t) &\Leftrightarrow \frac{q'(t)}{q(t)} = a \Leftrightarrow \ln|q(t)| = at + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow q(t) = k e^{at}, \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\text{or } q'(t) = 5,01 \Leftrightarrow k a e^a = 5,01$$

$$q(1) = 5,01 \Leftrightarrow k e^a = 5,01, \text{ donc } a=1 \text{ et } k = 5,01 e^{-1}$$

$$\text{Ainsi, } q(t) = 5,01 e^{-1} e^t = 5,01 e^{t-1}$$

- le gisement C est vide de son contenu lorsque $q(t) = 100$.

$$q(t) = 100 \Leftrightarrow 5,01 e^{t-1} = 100$$

$$\Leftrightarrow e^{t-1} = \frac{100}{5,01}$$

$$\Leftrightarrow t-1 = \ln\left(\frac{100}{5,01}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = 1 + \ln\left(\frac{100}{5,01}\right) = 3,99 \dots$$

1,5 pt

C₁
C₂
C₃

Après l'inauguration, il faudra 4 années à ce pays pour vider le gisement C de son contenu.

