COLLÈGE François-Xavier VOGT B.P. : 765 Ydé – Tél. : 222 31 54 28 e-mail : collegevogt@yahoo.fr ORA ET LABORA	Année scolaire 2021-2022 BACCALAURÉAT BLANC N° 3 ÉPREUVE DE MATHEMATIQUES	
	Durée : 4H	17 MAI 2022
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES	Coefficient : 2	SÉRIE : D-TI

A. EVALUATION DES RESSOURCES [15,50 POINTS]

EXERCICE 1 : [03,50 POINTS]

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$. [0,5pt]
2) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $(-iz + 3 + 3i)^2 - 2(-iz + 3 + 3i) + 2 = 0$ [1pt]
3) Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B, C et I d'affixes respectives $z_A = 1 + i$, $z_B = 1 - i$, $z_C = 2 - 2i$ et $z_I = 3$.
   a) Démontrer que le point A appartient au cercle de centre I et de rayon $R = \sqrt{5}$. [0,5pt]
   b) Calculer $\frac{z_C - z_I}{z_A - z_I}$, en déduire la nature exacte du triangle AIC. [0,5pt]
   c) s est la similitude directe du plan de centre O qui transforme A en C. Déterminer le rapport et l'angle de s. [1pt]

EXERCICE 2 : [04,00 POINTS]

I) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à termes positifs définie par : $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n}$ et $u_1 = 1$.

1) Calculer u_2 et u_3. Donner les résultats sous la forme 2^α où α est un réel. [0,5pt]
2) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $v_n = \ln u_n - 2\ln 2$.
   a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison. [0,5pt]
   b) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n. [0,75pt]
   c) Calculer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$. [0,25pt]

II) On considère l'équation différentielle $(E): y' - 2y = e^{2x}$.

1) Vérifier que la fonction $u(x) = xe^{2x}$ est une solution de l'équation (E). [0,5pt]
2) Résoudre dans IR l'équation différentielle $(E'): y' - 2y = 0$. [0,5pt]
3) Démontrer qu'une fonction v est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de (E'). [0,5pt]
4) En déduire toutes les solutions de l'équation (E). [0,5pt]

EXERCICE 3 : [05,00 POINTS]

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$. On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, l'unité graphique est de $2\ cm$ sur l'axe des abscisses et de $5\ cm$ sur l'axe des ordonnées.

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - x - 1$.
   a) Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}$, et dresser son tableau de variations. [1pt]
   b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$. [0,25pt]
2) a) Justifier que f est définie pour tout réel x. [0,5pt]
   b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{1}{xe^{-x} - 1}$. [0,5pt]
   c) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. [0,5pt]
3) a) Montrer que pour tout réel x $f'(x) = \frac{(1-x)e^x}{(e^x - x)^2}$, puis dresser son tableau de variations de f. [1pt]
4) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0. [0,5pt]
5) Tracer la droite (T), les asymptotes et la courbe (C_f). [1pt]

EXERCICE 4 : [03,00 POINTS]

On lance un dé tétraédrique dont les 4 faces portent les numéros 1, 2, 3 et 4 et on lit le numéro de la face cachée. Pour $i \in \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$, on note P_i la probabilité d'obtenir le nombre i sur la face cachée. Ce dé est pip de sorte que P_1, P_2, P_3 et P_4 soient dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 2.

1) a) Montrer que $P_1 = \frac{1}{15}$. **[0,75p**

b) Déterminer P_2, P_3 et P_4. **[0,75pt**

2) On lance cinq fois de suite ce dé et on note X la variable aléatoire égale au nombre de numéros pairs obtenus à l'issue des cinq lancers.

a) Déterminer l'univers-image $X(\Omega)$ de la variable aléatoire X. **[0,5p**

b) Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux numéros pairs à l'issue des cinq lancers. **[0,5p**

c) Calculer l'espérance mathématique de X. **[0,5p**

B. EVALUATION DES COMPETENCES [04,50 POINTS]

Compétences à évaluer : estimer une quantité, déterminer le plus court chemin entre deux localités et calculer une surface.

SITUATION : M. Kenne est propriétaire d'un véhicule qu'il conduit depuis quelques années déj Durant les six dernières années, il a relevé la distance parcouru par son véhicule lorsque le réservoir d'essenc est plein et a obtenu le tableau suivant.

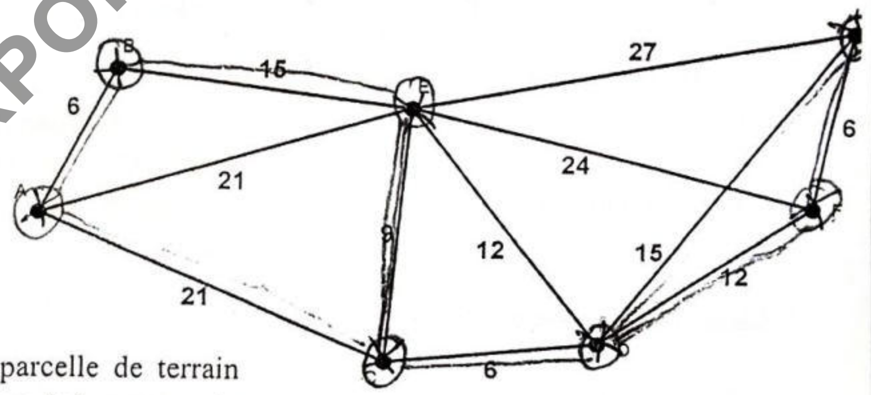
Année	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Rang de l'année (x_i)	1	2	3	4	5	6
Distance en km (y_i)	800	755	780	690	654	620

Avec le temps le moteur de son véhicule s'est dégradé et M. Kenne estime que si avec le réservoir pleir il ne peut parcourir que 500 kilomètres, alors il devra changer de moteur.

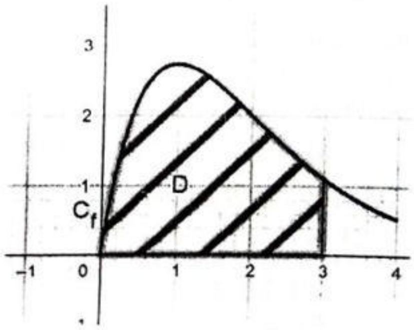
Aujourd'hui, M. Kenne transporte six passagers qui sont montés dans le véhicule dans la ville A et qu'i doit déposer dans les villes B, C, D, E, F et G.

Le graphe ci-contre représente un plan de la ville avec les distances en kilomètres séparant chacune d'elles lorsqu'il possible d'aller de l'une à l'autre.

Avec le volume d'essence dans son réservoir, M. Kenne pense pouvoir parcourir exactement $55\ km$ avant de tomber en panne sèche.



M. Kenne envisage l'achat d'une parcelle de terrain des activités agraires. Son ami M. Mvogo lui propose le terrain ci-contre (domaine D) délimité par : un cours d'eau dont une partie du tracé est représentée par la courbe de la fonction $f : x \longmapsto xe^{2-x}$; une route représentée par l'axe des abscisses d'équation $y = 0$; les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$. L'unité graphique est le décamètre. Avant de l'acheter il voudrait connaitre l'aire de ce terrain.



Tâches :

1) Si la dégradation du moteur continue de manière uniforme, en quelle année est-ce que M. Kenne devra changer de moteur ? **[1,5pt]**

2) Proposer à M Kenne un itinéraire lui permettant de déposer tous ses passagers à bon port avant qu'il ne soit à court d'essence, préciser sa longueur. **[1,5pt]**

3) Déterminer l'aire en m^2 du terrain que veut acheter M. Kenne. **[1,5pt]**

CORRIGÉ ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES N°3. BACC BLANC Série D MAI 2022 COLLÈGE F.X. VOGT.

Par M. Nathanaël AWONO MESSI
PLEG Maths

EXERCICE 1

1. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2z+2=0$.

$$\Delta=(-2)^2-4(1)(2)=4-8=-4=4i^2=(2i)^2.$$

les racines carrées de Δ sont $-2i$ et $2i$.

$z_1=\frac{2-2i}{2}=1-i$; $z_2=\frac{2+2i}{2}=1+i$

Ainsi, $S_{\mathbb{C}}=\{1-i;1+i\}$

2. Déduisons-en dans $\mathbb{C}$, les solutions de l'équation : $(-iz+3+3i)^2-2(-iz+3+3i)+2=0$.

posons $Z=-iz+3+3i$, alors l'équation devient $Z^2-2Z+2=0$.
Compte tenu du résultat de la question 1, $Z=1-i$ ou $Z=1+i$.

- $Z=1-i \Leftrightarrow -iz+3+3i=1-i$
  $\Leftrightarrow -iz=1-i-3-3i$
  $\Leftrightarrow z=\frac{-2-4i}{-i}=\frac{2+4i}{i}=-i(2+4i)=4-2i$

- $Z=1+i \Leftrightarrow -iz+3+3i=1+i$
  $\Leftrightarrow -iz=-2-2i$
  $\Leftrightarrow z=\frac{-2-2i}{-i}=\frac{2+2i}{+i}=-i(2+2i)=2-2i$

Ainsi, $S_{\mathbb{C}}=\{4-2i;2-2i\}$.

3. (a) Démontrons que le point A appartient au cercle de centre I et de rayon $r=\sqrt{5}$.

Nous avons : $IA = |z_A - z_I| = |1+i-3| = |-2+i| = \sqrt{(-2)^2+(1)^2} = \sqrt{5} = R$

donc A appartient au cercle de centre I et de rayon $R = \sqrt{5}$.

(b) Calculons $\dfrac{z_C - z_I}{z_A - z_I}$ et déduisons-en la nature exacte du triangle AIC.

On a : $\dfrac{z_C - z_I}{z_A - z_I} = \dfrac{2-2i-3}{1+i-3} = \dfrac{-1-2i}{-2+i} = \dfrac{(-1-2i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} = \dfrac{2+i+4i-2}{(-2)^2+(1)^2} = \dfrac{5i}{5} = i$

donc AIC est un triangle rectangle et isocèle en I.

(c) Déterminons le rapport et l'angle de S.

Soit k le rapport et θ l'angle de S.

On a : $\begin{cases} S(O) = O \\ S(A) = C \end{cases}$, donc $\begin{cases} OC = kOA \\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \theta \end{cases}$, ainsi $\begin{cases} k = \dfrac{OC}{OA} \\ \theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \end{cases}$.

Evaluons le rapport $\dfrac{z_C - z_O}{z_A - z_O}$.

$\dfrac{z_C - z_O}{z_A - z_O} = \dfrac{z_C}{z_A} = \dfrac{2-2i}{1+i} = \dfrac{(2-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{2(1-i)^2}{1^2+1^2} = (1-i)^2 = 1-2i-1$

$= -2i$

$= 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

- $k = \dfrac{OC}{OA} = \left|\dfrac{z_C - z_O}{z_A - z_O}\right| = 2$
- $\theta = \arg\left(\dfrac{z_C - z_O}{z_A - z_O}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.

S est la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$

EXERCICE 2.

I) 1. Calculons U_2 et U_3. Donnons les résultats sous la forme 2^α où α est un réel.

- $U_2 = 2\sqrt{U_1} = 2 = 2^1$
- $U_3 = 2\sqrt{U_2} = 2\sqrt{2} = 2 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$.

2.(a) Montrons que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométique dont on précisera la raison.

$$V_{n+1} = \ln U_{n+1} - 2\ln 2 = \ln 2\sqrt{U_n} - 2\ln 2 = \ln 2 + \ln\sqrt{U_n} - 2\ln 2$$
$$= \ln\sqrt{U_n} - \ln 2 = \frac{1}{2}\ln U_n - \ln 2 = \frac{1}{2}(\ln U_n - 2\ln 2)$$
$$= \frac{1}{2}V_n$$

donc $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométique de raison $\frac{1}{2}$ et de 1er terme $V_1 = \ln U_1 - 2\ln 2 = -2\ln 2$.

(b) Exprimons V_n, puis U_n en fonction de n.

$(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant une suite géométique de raison $\frac{1}{2}$ et de 1er terme $V_1 = -2\ln 2$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $V_n = -2\ln 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

De l'égalité $V_n = \ln U_n - 2\ln 2$, on a: $\ln U_n = 2\ln 2 + V_n$.

donc $\ln U_n = 2\ln 2 - 2\ln 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2\ln 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$

Ainsi, $U_n = e^{2\ln 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}$

(c) Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Comme $0 < \frac{1}{2} < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$

Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = e^{2\ln 2} = e^{\ln 4} = 4$.

II) 1. Vérifions que la fonction u est une solution de l'équation (E).

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$u'(x) = (xe^{2x})' = (x)'e^{2x} + (e^{2x})' \times x = e^{2x} + 2xe^{2x}$

et $u'(x) - 2u(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} - 2xe^{2x} = e^{2x}$

donc u est une solution de l'équation (E).

2) Resolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E'):

$(E') : y' - 2y = 0 \Leftrightarrow y' = 2y \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = 2. \Leftrightarrow \ln|y| = 2x + C$

les solutions de (E') sont les fonctions $x \mapsto ke^{2x}$ où $k \in \mathbb{R}$.

3) Démontrons qu'une fonction v est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de (E').

v est solution de (E) $\Leftrightarrow$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $v'(x) - 2v(x) = e^{2x}$

$\Leftrightarrow v'(x) - 2v(x) = u'(x) - 2u(x)$ d'après 1)

$\Leftrightarrow v'(x) - u'(x) - 2v(x) + 2u(x) = 0$

$\Leftrightarrow (v-u)'(x) - 2(v-u)(x) = 0$

$\Leftrightarrow v - u$ est solution de (E').

4) Déduisons-en toutes les solutions de l'équation (E).

$v - u$ est solution de (E') $\Leftrightarrow$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $v(x) - u(x) = ke^{2x}$

$\Leftrightarrow v(x) = ke^{2x} + u(x)$ est solution de (E)

$\Leftrightarrow v(x) = ke^{2x} + xe^{2x}$.

les solutions générales de (E) sont les fonctions $x \mapsto ke^{2x} + xe^{2x}$ où $k \in \mathbb{R}$

EXERCICE 3.

1.(a) Etudions les variations de g sur $\mathbb{R}$ et dressons son tableau de variations.

$g(x) = e^{x} - x - 1$.

$D_g = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x - x - 1 = +\infty$, car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x - 1$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > e.$

donc g est strictement décroissante sur $]-\infty; e[$ et strictement croissante sur $]e; +\infty[$.

Tableau de variations

x	$-\infty$		e		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$e^e - e - 1$	$\nearrow$	$+\infty$

(b) Déduisons-en le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

D'après ce qui précède et comme $g(e) = e^e - e - 1 > 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$.

2.(a) Justifions que f est définie pour tout réel x.

Nous venons de voir que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$, donc $e^x - x - 1 > 0$ c'est-à-dire $e^x - x > 1 \neq 0$, donc f est définie pour tout réel x.

(b) Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{xe^{-x}}{1 - xe^{-x}}$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{x}{e^x - x} = \frac{x}{e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)} = \frac{xe^{-x}}{1 - \frac{x}{e^x}} = \frac{xe^{-x}}{1 - xe^{-x}}$

(c) Calculons les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x - x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 1} = 0$ Car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} - 1 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{xe^{-x}}{1 - xe^{-x}} = \lim\limits_{X\to-\infty} \frac{X}{1 - X} = -1$ Car $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty$

3.(a) Montrons que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{(1-x)e^x}{(e^x-x)^2}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{(x)'(e^x-x) - (e^x-x)'x}{(e^x-x)^2}$

$$= \frac{e^x - x - (e^x-1)x}{(e^x-x)^2} = \frac{e^x - x - xe^x + x}{(e^x-x)^2}$$

$$= \frac{e^x - xe^x}{(e^x-x)^2} = \frac{(1-x)e^x}{(e^x-x)^2}.$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{e^x}{(e^x-x)^2} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$.

$1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Ainsi f est strictement croissante sur $]-\infty;1[$ et strictement décroissante sur $]1;+\infty[$.

Dressons le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{e-1}$	$\searrow$	0

4. Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0.

(T): $y = f'(0)x + f(0)$ or $f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$

donc $\boxed{(T): y = x.}$

5. Traçons la droite (T), les asymptotes et la courbe $(\mathcal{C}_f)$

(Voir figure)

EXERCICE 4.

1.(a) Montrons que $P_1 = \frac{1}{15}$.

P_1, P_2, P_3 et P_4 étant dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 2, alors $P_2 = 2P_1$; $P_3 = 2P_2 = 2^2 P_1$, $P_4 = 2P_3 = 2^3 P_1$

or $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$

donc $P_1 + 2P_1 + 4P_1 + 8P_1 = 1$, c'est-à-dire $15P_1 = 1$, ainsi $P_1 = \frac{1}{15}$.

(b) Déterminons P_2, P_3 et P_4

$P_2 = 2P_1 = 2 \times \frac{1}{15} = \frac{2}{15}$; $P_3 = 4P_1 = 4 \times \frac{1}{15} = \frac{4}{15}$; $P_4 = 8P_1 = 8 \times \frac{1}{15} = \frac{8}{15}$.

2.(a) Déterminons l'univers-image $X(\Omega)$ de la variable aléatoire X.

À l'issue des cinq lancers, on peut obtenir un numéro pair 0 fois, 1 fois, 2 fois, 3 fois, 4 fois ou 5 fois

donc $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

(b) Calculons la probabilité d'obtenir exactement deux numéros pairs à l'issue des cinq lancers.

Etant donné un lancer, soit on obtient un numéro pair avec une probabilité $p = P_2 + P_4 = \frac{2}{15} + \frac{8}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$; soit on obtient un numéro impair avec une probabilité $1 - p = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

X est la variable aléatoire égale au nombre de numéros pairs obtenus à l'issue des cinq lancers, donc X suit théoriquement une loi binomiale de paramètres 5 et $\frac{2}{3}$.

$$X \leadsto \mathcal{B}\left(5 ; \frac{2}{3}\right)$$

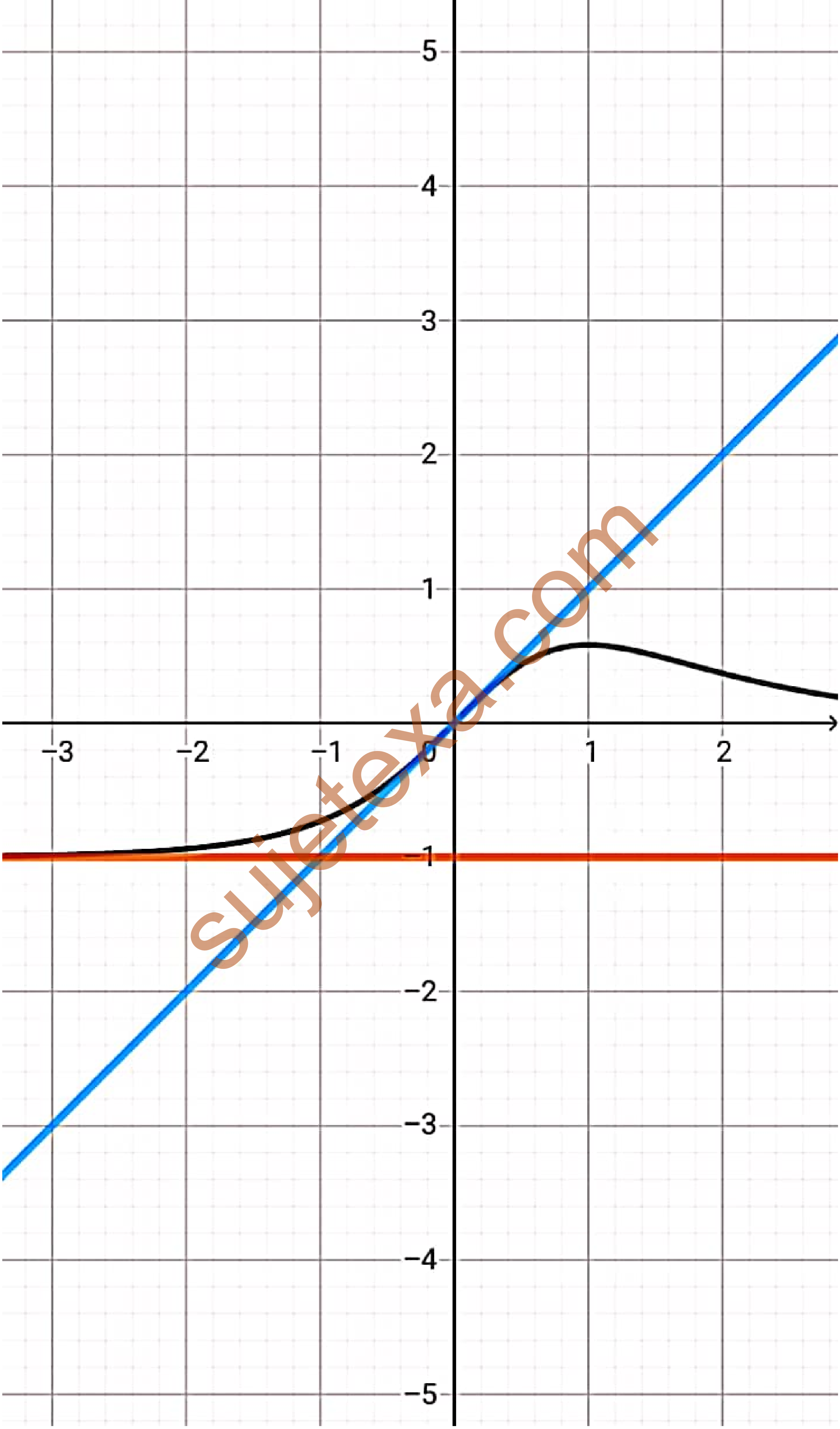
$$p(X=2) = C_5^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 10 \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{27} = \frac{40}{243} \simeq 0,17.$$

(c) Calculons l'espérance mathématique de X.

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(5, \frac{2}{3}\right)$$

$$E(X) = np = 5 \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3}.$$

$$\boxed{E(X) = \frac{10}{3}.}$$


5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-3
-2
-1
1
2