

EXERCICE 1 : 4,5 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère la conique (C) d'équation cartésienne $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

1. a) Parmi les trois propositions suivantes, recopier celle qui est vraie :
 α) (C) est une parabole ; β) (C) est une hyperbole ; γ) (C) est une ellipse. 0,5pt
- b) Calculer son excentricité et les coordonnées de ses foyers. 1,5pt
- c) Déterminer des équations cartésiennes des directrices et des asymptotes. 1pt
2. a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (E) des points $M(x; y)$ du plan, tels que $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 4$. 0,75pt
- b) Déterminer les coordonnées des points de rencontre de (E) avec la droite (D) d'équation $x - 1 = 0$. 0,75pt

EXERCICE 2 : 5,5 points

I- On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies respectivement par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3} \end{cases}$
et $v_n = u_n - 2$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme. 1pt
 2. Ecrire v_n et u_n en fonction de n . 1pt
 3. Calculer $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} + v_n$ en fonction de n . 1pt
- II- P est le polynôme de la variable complexe z défini par :
 $P(z) = z^3 - (6 + 8i)z^2 + (-9 + 38i)z + 40 - 30i$.
1. Calculer $P(4 + 2i)$. 0,5pt
 2. En déduire l'écriture de $P(z)$ sous la forme $P(z) = (z - 4 - 2i)(az^2 + bz + c)$ où a, b et c sont des nombres complexes à déterminer. 1pt
 3. A B et C sont des points du plan complexe, d'affixes respectives $z_A = 5i, z_B = 2 + i$ et $z_C = 4 + 2i$.
 - a) Ecrire sous la forme algébrique le quotient $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$. 0,75pt
 - b) En déduire la nature exacte du triangle ABC. 0,25pt

PROBLÈME: 10 points

Le tableau des variations ci-contre est celui d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (ax + b)e^x$ où a et b sont des nombres réels.

1. a) Déterminer la dérivée g' de g en fonction de a et b . 0,5pt
- b) Justifier que le couple $(a; b)$ est la solution du système $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + y = -1 \end{cases}$. 0,5pt
- c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}, g(x) = (x - 2)e^x$. 0,75pt

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	0	$-e$	$+\infty$

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - 2)e^x$.
- Montrer que la dérivée f' de f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = (x - 1)e^x$. 0,5pt
 - Préciser le sens des variations de f . 0,5pt
3. Donner les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. 0,5pt
4. Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ et en donner une interprétation géométrique. 1pt
5. Déterminer une équation cartésienne de la droite (D), tangente à la courbe (C) de f au point d'abscisse 0. 0,75pt
- On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -f(x)$ et (C') sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique : 1cm.
6. Construire (C), (D) et (C') dans le même repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. 2pts
7. a) Justifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (x - 3)e^x$ est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$. 0,5pt
- b) En déduire l'aire de la portion du plan délimitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$. 1pt
8. On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' - y = 2xe^x$.
- Justifier que f est une solution de (E). 0,5pt
 - Résoudre l'équation différentielle (E') : $y'' + 2y' - y = 0$. 1pt