PROPOSITION DU CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES

BACCALAURÉAT D

SESSION 2022

Par Mr. KAMGANG FOMO EINSTEIN
Professeur de Mathématiques

Exercice 1

1.(a) Démontrons que IAB est un triangle rectangle isocèle de sens direct

$z_A = 4+i$; $z_B = 3i$, $z_I = 1$.

Donc, dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, $A\binom{4}{1}$, $B\binom{0}{3}$ et

$I\binom{1}{0}$ ⇒ $\vec{AB}\binom{-4}{2}$; $\vec{AI}\binom{-3}{-1}$ et $\vec{BI}\binom{1}{-3}$

Donc, IA = IB ⇒ $\frac{z_B-z_I}{z_A-z_I} = \frac{3i-1}{4+i-1}$

$= \frac{3i-1}{3+i}$

$= \frac{(3i-1)(3-i)}{(3)^2+(1)^2}$

$$\frac{z_B-z_I}{z_A-z_I} = i$$

D'où IAB est un triangle rectangle en I.

De plus, mes$(\vec{IA}, \vec{IB})$ = arg$(i) = \frac{\pi}{2} > 0$

De sens direct.

(b) * Calculons $\frac{z_B-z_J}{z_A-z_J}$

$\frac{z_B-z_J}{z_A-z_J} = \frac{3i-i}{4+i-i} = \frac{4i}{4} = i \in i\mathbb{R}$ donc,

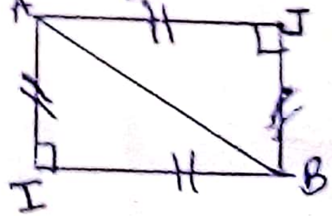
ABJ est un triangle rectangle isocèle en J de sens direct.

(c). Démontrons que I, A, B et J appartiennent à un même cercle.

$\frac{z_B-z_I}{z_A-z_I} \div \frac{z_B-z_J}{z_A-z_J} = \frac{i}{i} = 1 \in \mathbb{R}^*$

Donc, les points I, A, B et J sont cocycliques

Comme IAB et ABJ sont deux triangles rectangles isocèles et BI = BJ, AI = AJ, ⇒ AJIB est un carré alors, l'affixe de son centre est le milieu du segment [AB]. Donc, $\Omega\binom{2}{2}$ et le rayon est $\frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$



2) $S(I) = B$
A

(a) Démontrons que $S: z' = (1-i)z - 1 + 4i$

Nous savons que $z' = az + b$.

alors, $z_A = \dfrac{b}{1-a}$ avec $a = 1-i$ et

$b = -1+4i$ et Ω le centre.

Vérifions si $z_A = 4+i$.

$$z_A = \frac{b}{1-a} = \frac{-1+4i}{1-1+i} = \frac{-1+4i}{i} = (1-4i)i$$

$z_A = 4+i$ (Vraie).

~~Maintenant~~ vérifions si l'image de I par S c'est bien et bien B.

Alors, $z' = (1-i)(1) - 1 + 4i = 1 - 1 - i + 4i$
$= 3i = z_B$

D'où $S: z' = (1-i)z - 1 + 4i$ est bien et bien la similitude directe.

b) Donnons l'angle et le rapport de S

* Rapport :

$$K = \frac{AB}{AI} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{10}} = \sqrt{2}$$

* L'angle :

$(1-i) = e^{i\alpha}$ et $z' = K e^{i\alpha} z + b$

$\Rightarrow \sqrt{2}(1-i) = e^{i\alpha}$

$\Rightarrow \sqrt{2} - \sqrt{2}i = \cos\alpha + i\sin\alpha$

$\Rightarrow 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \cos\alpha + i\sin\alpha$

$\Rightarrow 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \cos\alpha - i\sin\alpha.$

$\Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4} = mes\,(\widehat{\vec{IA}, \vec{IB}}).$

c) Image du cercle $(\mathcal{C})$.

Image de A par S :

$z' = (1-i)(4+i) - 1 + 4i$

$= 4 + i - 4i + 1 - 1 + 4i$

$z' = 1+i$ soit $R\binom{1}{1}$.

Donc, c'est le cercle $(\mathcal{C}')$ de centre $R\binom{1}{1}$ et de rayon

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exercice 2

$f(x) = \ln(e^x + x) - x$

1. Variations de f :

$\forall x \in [0; +\infty[$, $f'(x) = [\ln(e^x+x)]' - (x)'$

$= \frac{e^x+1}{e^x+x} - 1$

$f'(x) = \frac{1-x}{e^x+x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ Donc,

$\forall x \in [0; 1]$, f est croissante et $\forall x \in]1; +\infty[$, f est strictement décroissante.

2. (a) Montrons que $f(x) = \ln(1 + \frac{x}{e^x})$

$\forall x \in [0; +\infty[$, $\ln(1 + \frac{x}{e^x}) = \ln\left(\frac{e^x+x}{e^x}\right)$

$= \ln(e^x+x) - \ln e^x$

$= \ln(e^x+x) - x$

$= f(x)$

D'où $f(x) = \ln(1 + \frac{x}{e^x})$.

(b) limite et asymptote.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ car $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

Donc, la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à (C).

3) Tableau de variations

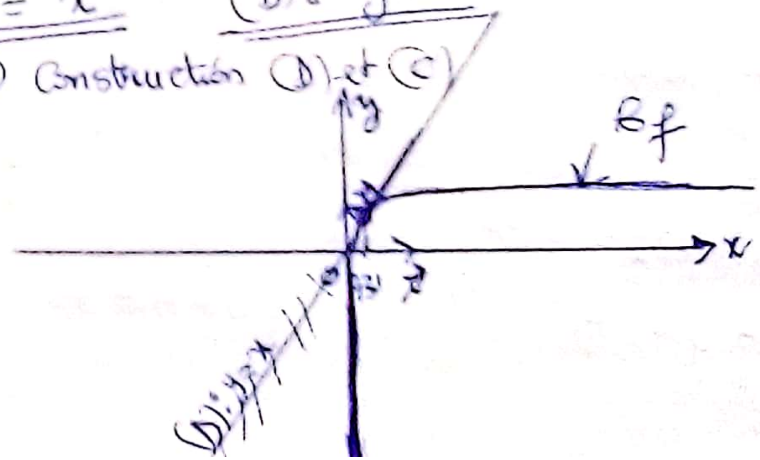
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\ln(e^{-1}+1)$	$\searrow$	0

4. (a) Équation de la tangente au point d'abscisse 0.

$y = f'(0)(x) + f(0)$

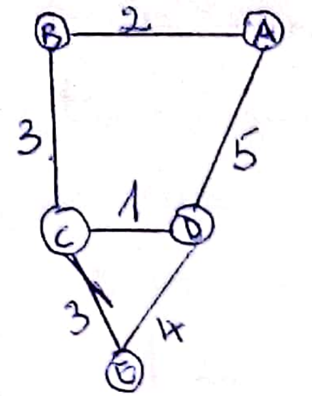
$y = x$ $(D): y = x$

b) Construction (D) et (C)



Exercice 3

a) Construction



(b)

A	B	C	D	E	F	Sommet choisit
0	∞	∞	∞	∞	∞	A(0)
	2(A)	6(A)	5(A)			B(2)
		5(B)				C(5)
			6(C)	8(C)		D(6)
					10(D)	E(10)

Le plus court chemin est ABCDE.

2. Déterminons les coordonnées du point moyen

$$\begin{cases} x - 0{,}135y = 6{,}65 \\ 6x - y = 38 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \times(-6) \\ \times(1) \end{matrix} \begin{cases} x - 0{,}135y = 6{,}65 \\ 6x - y = 38 \end{cases}$$

$\Rightarrow y = 10.$

$x = 6{,}65 + 0{,}135 \times 10 = 8$

Donc, $y = 10$ et $x = 8$ D'où $\boxed{G\begin{pmatrix}8\\10\end{pmatrix}}$

b) Coefficient de corrélation linéaire entre x et y puis interprétation.

Nous ~~avons~~ que $r = \dfrac{cov(x,y)}{\sqrt{V(x) \times V(y)}}$

C'est-à-dire : $r^2 = \dfrac{cov^2(x,y)}{V(x) \times V(y)}$

$\Rightarrow r^2 = \dfrac{cov(x,y)}{V(x)} \times \dfrac{cov(x,y)}{V(y)}$

or $a = \dfrac{cov(x,y)}{V(x)}$ est le coefficient directeur de la droite de regression de y en x et $a' = \dfrac{cov(x,y)}{V(y)}$ est le coefficient directeur de la droite de regression de x en y.

La droite de y en x est : $y = 6x - 38$ donc $a = \dfrac{cov(x,y)}{V(x)} = 6$

La droite de regression de x en y est :

$x = 0,135y + 6,65$

$\Rightarrow 0,135y = x - 6,65$

$\Rightarrow y = 7,04x - 49,259$

d'ignorer donc, $a' = \frac{Cov(x,y)}{V(y)} = 0,135$

Par conséquent, $r^2 = a \times a' = 6 \times 0,135$

$\Leftrightarrow r = \sqrt{aa'} = \sqrt{6 \times 0,135} = 0,81$

$r = 0,81 \in [0,87; 1]$

$r \in [0,87; 1]$,

Conclusion la corrélation linéaire est bonne.

3) (a) Probabilité d'obtenir deux boules de même couleur.

$card(\Omega) = C_{10}^2 = 45$

$$P_1 = \frac{C_3^2 + C_2^2 + C_5^2}{C_{10}^2} = \frac{3 + 1 + 10}{45} = \frac{14}{45}$$

$$P_1 = \frac{14}{45} \simeq 0,31$$

b) Probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes :

$$P_2 = \frac{C_3^1 \times C_2^1 + C_3^1 \times C_5^1 + C_2^1 \times C_5^1}{C_{10}^2} = \frac{6 + 15 + 10}{45}$$

$$P_2 = \frac{31}{45} \simeq 0,62$$

Partie B : Évaluation des compétences

Tâche 1

Déterminons le bénéfice maximal.

Pour cela, il faut :

- Résoudre l'équation différentielle $h''(x) - 3h'(x) + 2h(x) = 0$;

- Trouver une solution générale de cette équation qui sera de la forme $Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ où r_1 et r_2 sont des solutions réelles de cette équation,

- Puis, déduire la valeur de A et la valeur de B ;

- En fin, étudier les variations de la fonction $x \mapsto h(x) = Ae^{r_1 x} - Be^{r_2 x}$ et déduire le bénéfice maximal.

- Résolution de l'équation

$h''(x) - 3h'(x) + 2h(x) = 0$

$\Rightarrow r^2 - 3r + 2 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(2) = 9 - 8 = 1 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = 1$

$r_1 = \frac{3-1}{2} = 1$ et $r_2 = \frac{3+1}{2} = 2$

Donc, $h(x) = Ae^{x} + Be^{2x}$.

La courbe de h passe par $A(0;15000)$ donc,

$h(0) = 15000 \Rightarrow A + B = 15000$ (1).

De plus, le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0 est : $y = h'(0)(x) + h(0)$.

Comme le coefficient directeur vaut 10000,

$\Rightarrow h'(0) = 10000$,

$h'(x) = Ae^{x} + 2Be^{2x} \Rightarrow h'(0) = A + 2B = 10000$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow \begin{cases} A + B = 15000 \\ A + 2B = 10000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 15000 \\ -A - 2B = -10000 \end{cases}$

$-B = 5000$

$\Rightarrow B = -5000$

$\Rightarrow A = 15000 - B = 15000 + 5000 = 20000$

Donc, $h(x) = 20000\,e^{x} - 5000\,e^{2x}$

$h'(x) = 20000\,e^{x} - 10000\,e^{2x}$ $\boxed{D_h = \mathbb{R}}$

$h'(x) = 0 \Rightarrow e^{x} > 0$ et $e^{x} = 2$

$\Rightarrow x = \ln 2$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	20000	$\searrow$	$-\infty$

h est continue et $\begin{cases} \text{croissante sur }]-\infty ; \ln 2] \\ \text{décroissante sur } [\ln 2 ; +\infty[\end{cases}$

et admet un maximum en $\ln 2$ qui est 20000.

D'où le bénéfice cherché est $h(\ln 2) = 20000$ milliers de francs

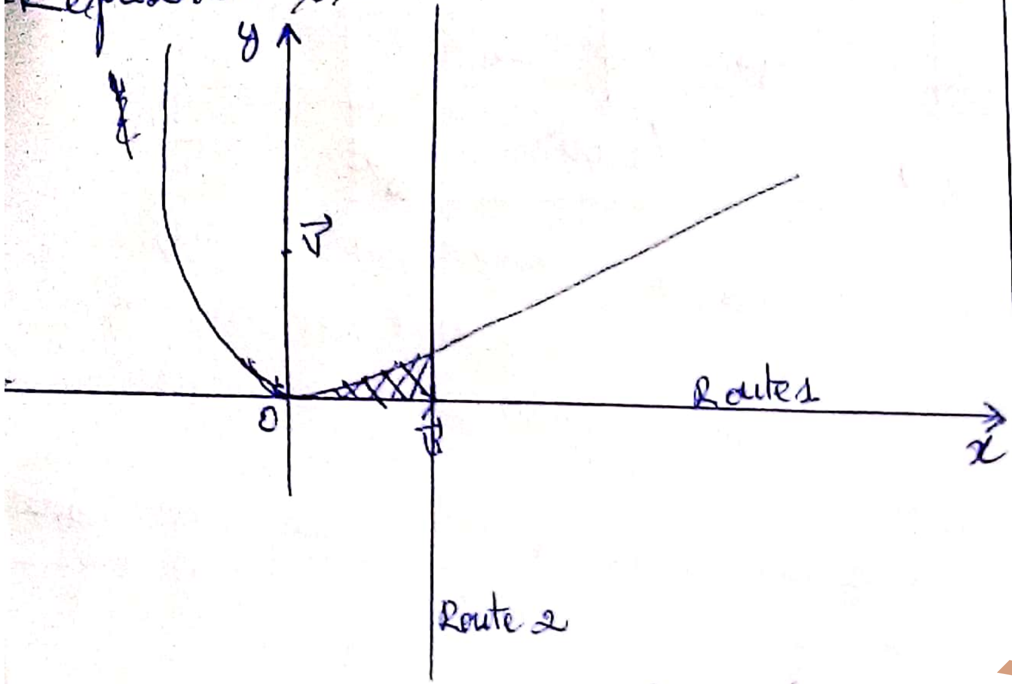
Tâche 2 :

Déterminons l'aire du domaine bénéfique.

Pour cela, nous allons :

- Représenter le domaine compris entre les deux routes et la rivière ;
- Trouver le domaine de définition de la fonction numérique g.
- Déduire la valeur de l'aire du domaine en faisant appel aux intégrales.

Représentons l'aire du domaine :



Ce domaine, est la partie hachurée.

- Trouvons D_g

Nommons D_{g_1} le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \ln(x+1)$ et D_{g_2} le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \frac{x}{x+1}$

g_1 ~~existe~~ existe si et seulement si $x+1>0$

$\Rightarrow x>-1 \Rightarrow x \in]-1;+\infty[$.

g_2 existe si et seulement si $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

$\Rightarrow x \in]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

$D_g = D_{g_1} \cap D_{g_2} =]-1;+\infty[$

- Trouvons l'aire du domaine :

$$\mathcal{A} = \int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}\,dx$$

$$\mathcal{A} = \int_0^1 \ln(x+1)\,dx - \int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx$$

$$= [x\ln(x+1)]_0^1 - [x-\ln(x+1)]_0^1$$

$$= \ln 2 - (1-\ln 2)$$

$$= \ln 2 + \ln 2 - 1$$

$\mathcal{A} = (2\ln 2 - 1)$ u.a   Comme $1cm \to 100m$ $\Rightarrow$ u.a $= 10000m^2$

soit $\mathcal{A} = 10000 \times (2\ln 2 - 1) = 3862{,}9\,m^2$

Tâche 3 : Déterminons l'aire du domaine bénéfique à la production de bananes :

Pour cela, on a :

- Déterminer l'ensemble des points M tel que $\vec{MB_1} \cdot \vec{MB_2} = 0$;
- Déterminer les affixes des points B_1 et B_2 ;
- Trouver l'aire du domaine

- Trouvons l'ensemble des points M.

$\overrightarrow{MB_1} \cdot \overrightarrow{MB_2} = 0 \iff$ M appartient au cercle de diamètre $[B_1B_2]$. Donc, le rayon de ce cercle est : $r = \frac{B_1B_2}{2}$.

- Déterminons les affixes des points B_1 et B_2.

Z_{B_1} et Z_{B_2} vérifient l'équation

$z^2 - (2+4i)z - 6 + 8i = 0$

$\Delta = [(2+4i)]^2 - 4(1)(-6+8i)$

$= +16i + 4 - 16 + 24 - 32i$

$= -12 + 16i + 24 - 32i$

$\Delta = 12 - 16i$

Racines carrées de Δ.

soit $z \in \mathbb{C}$ / $z = x + iy$ vérifiant $\begin{cases} x^2+y^2 = 20 \\ x^2 - y^2 = 12 \end{cases}$

$2x^2 = 32$

$\Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$ ou $x = -4$

$\Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = 2$ ou $y = -2$

Donc, $\sqrt{\Delta} = 4 - 2i$

$Z_{B_1} = \frac{2+4i-4+2i}{2} = -1+4i$ et $Z_{B_2} = \frac{2+4i+4-2i}{2} = 3+i$

Donc, $B_1B_2 = |Z_{B_1} - Z_{B_2}| = 5$ soit $r = \frac{B_1B_2}{2} = \frac{5}{2}$ cm

Ainsi, $\mathcal{A} = (\pi r^2)$ u.a

$= \left(3,14 \times \frac{25}{4}\right) \times 10\,000$

$= 196250$ m²

D'où l'aire cherchée est 196250 m²

Présentation : 0,25 pt

Proposée par M. KAMGANG FOMO EINSTEIN
Professeur de Mathématiques

Dschang, 02 JUIN 2022

Contacts : 6 56 77 56 20 / 6 78 46 90 18