

Cette épreuve étalée sur deux pages, est constituée de deux parties indépendantes.

PARTIE A : Évaluation des ressources (15 points)

Exercice 1 : (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

On considère les points A, B, F et G d'affixes respectives :

$$Z_A = 1 + i\sqrt{3} ; Z_B = -1 - i\sqrt{3} ; Z_F = 4 \text{ et } Z_G = -4.$$

- 1) Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation $z^2 + 2 - 2i\sqrt{3} = 0$. (0,75 pt)
- 2) Soit s la similitude directe d'expression complexe $z' = (1 - i\sqrt{3})z$.
 - a) Donner les éléments caractéristiques de s . (0,75pt)
 - b) Quelles sont les images par s des points A et B ? (0,5pt)
- 3) Soit (\mathcal{E}) l'ellipse de foyers A et B et d'excentricité $e = \frac{1}{2}$.
 - a) Déterminer une équation de l'image (\mathcal{E}') de (\mathcal{E}) par la similitude s . (1pt)
 - b) Construire (\mathcal{E}') puis (\mathcal{E}) dans le même repère. (1pt)
- 4) Aïcha a choisi au hasard l'un après l'autre, deux points distincts parmi les points O, A, B, F et G comme ceux par lesquels passe l'axe focal de l'ellipse (\mathcal{E}') .
Quelle est la probabilité qu'elle ait choisi deux points de l'axe focal de (\mathcal{E}') ? (1pt)

Exercice 2 : (5 points)

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base d'un espace vectoriel E .

Soit f un endomorphisme de E .

- 1) Pour k appartenant à \mathbb{R} , on considère l'ensemble E_k des vecteurs \vec{u} de E tels que $f(\vec{u}) = k\vec{u}$.
 - a) Démontrer que E_k est un sous-espace vectoriel de E . (1pt)
 - b) On suppose que f vérifie l'égalité $f \circ f = 2f$.
Démontrer que $\vec{u} \in \text{Im}f$ si et seulement si $\vec{u} \in E_2$. (1pt)
- 2) On suppose ici qu'on a :
$$f(\vec{i} + \vec{j}) = 2\vec{i} + 2\vec{j} ;$$
$$f(\vec{i} - \vec{j}) = 2\vec{i} - 2\vec{j} ;$$
$$f(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = \vec{0} .$$
 - a) Démontrer que $f(\vec{i}) = 2\vec{i}$, $f(\vec{j}) = 2\vec{j}$ et $f(\vec{k}) = -2\vec{i} + 2\vec{j}$. (0,75pt)
 - b) Donner la matrice M de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. (0,5pt)
 - c) Démontrer que $f \circ f = 2f$. (0,5pt)
 - d) Déterminer par une de ses bases, le noyau $\text{Ker}f$ de f . (0,5pt)
 - e) Déterminer l'image $\text{Im}f$ de f . On précisera une de ses bases. (0,75pt)

Exercice 3 : (5 points)

f est une fonction définie sur $[0 ; 2\pi]$ par $f(x) = e^{-x} \cos x$.

(C_f) est la courbe de f dans un repère orthogonal où en abscisse, on a 2 cm pour unité et en ordonnée 4 cm pour unité.

- 1) Démontrer que $f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0$. (0,5pt)
- 2) Étudier les variations de f et dresser son tableau des variations. (1,25pt)
- 3) a) Démontrer qu'on a $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$. (0,5pt)
b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C_f) avec les courbes d'équations $y = e^{-x}$ et $y = -e^{-x}$. (0,75pt)
- 4) Sur $[0; 2\pi]$, tracer dans le même repère, les courbes d'équations $y = e^{-x}$ et $y = -e^{-x}$ puis la courbe (C_f) . (1pt)
- 5) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par (C_f) et la courbe d'équation $y = e^{-x}$ sur $[0; 2\pi]$. On pourra utiliser la question 1). (1pt)

PARTIE B : Évaluation des compétences (5 points)

Situation :

Trois gisements de gaz A, B et C présentant chacun 100 milliards de m^3 de quantité, ont été découverts dans un pays. L'inauguration a eu lieu à une certaine année (année 0) prise comme origine des temps t (en années).

L'exploitation du gaz des gisements A et B avait commencé à la date $t = 0$ et celle du gisement C légèrement avant. Seulement à la date $t = 1$, la quantité totale du gaz extraite de chacun de gisements A et C était de 5,01 milliards de m^3 .

- Pour le gisement A et à partir de la 2^e année, la quantité de gaz extraite chaque année augmente de 0,75 milliards de m^3 par rapport à celle de l'année précédente.
- Pour les gisements B et C, les ingénieurs pétrochimistes savent que si $q(t)$ est la quantité totale (en milliards de m^3) de gaz extraite de chacun de ces gisements à la date t , alors le taux d'extraction ou de consommation du gaz du gisement à cette date t est $q'(t)$ (milliards de m^3 par an).
 - Au niveau du gisement B, ce taux est $\left(\frac{1}{2t+1} + 0,02t\right)$ milliard de m^3 par an.
 - Au niveau du gisement C, ces taux (aux dates t) sont proportionnels aux quantités de gaz extraites à ces dates. À la date $t = 1$ ce taux était 5,01 milliards de m^3 par an.

Tâches :

- 1) En combien d'années le gisement A s'épuisera-t-il ? (1,5pt)
- 2) Combien d'années d'extraction suffiront à ce pays pour épuiser le contenu du gisement B ? (1,5pt)
- 3) Après l'inauguration, combien d'années faudra-t-il à ce pays pour vider le gisement C de son contenu ? (1,5pt)

Présentation :