

L'épreuve est notée sur 20 et comporte deux parties A et B réparties sur deux pages.

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES (15 points)

Exercice 1 : (5 points)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2 - (1 + 2i)z + 1 + 7i = 0$ et S une application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = (-1 + i)z + 6 - 3i$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). 0,75pt
2. On considère les points A , B et C d'affixes respectives $z_A = 3$; $z_B = -2 + i$ et $z_C = 7 - 6i$.
 - (a) Placer les points A , B et C dans le plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$. 1pt
 - (b) Calculer $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ et en déduire la mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. 0,75pt
3. (a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S . 0,75pt
 - (b) Déterminer l'image du point B par S . 0,5pt
 - (c) (C) est le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$. Déterminer et construire l'image (Γ) de (C) par S puis donner son équation cartésienne. 1pt

Exercice 2 : (3 points)

On s'est intéressé au nombre de battements du cœur par minute d'une personne en fonction de l'intensité de travail fourni. Les résultats obtenus sont :

Intensité de travail en kilojoules (x_i)	10	13	19	30	38	48	50	56
Nombre de battements du cœur par minute (y_i)	70	86	92	106	120	130	144	152

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique dans un repère orthogonal.
On prendra : 1 cm pour 5 kilojoules en abscisses ; 1cm pour 10 battements de cœur par minute en ordonnées. De plus, on prendra pour origine du repère, le point de coordonnée (0; 50). 1pt
2. Calculer les coordonnées du point moyen G_1 des quatre premiers points du nuage et les coordonnées du point G_2 des quatre derniers points. 0,5pt
3. Déterminer la droite de régression de y en x . 1pt
4. Calculer l'intensité de travail correspondant à une fréquence cardiaque de 155 battements par minute (arrondir à l'unité supérieure). 0,5pt

Exercice 3 : (2,5 points)

On considère l'équation différentielle (E): $y' - 2y = xe^x$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E_0): y' - 2y = 0$. 0,5pt
2. Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax + b)e^x$.

- (a) Déterminer a et b pour que u soit solution de (E) . 0,5pt
 (b) Montrer que v est solution de (E_0) si et seulement si $u + v$ est solution de (E) . 0,5pt
 (c) En déduire l'ensemble solution de (E) . 0,5pt
 3. Déterminer la solution de (E) dont la courbe passe par l'origine du repère. 0,5pt

Exercice 4 : (4,5 points)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - x - 2$. On pose $h(x) = 2(e^x - 1)$ et on définit la suite (u_n) par $u_{n+1} = h(u_n)$.

1. Étudier les variations de g et dresser son tableau de variations. 0,75pt
2. (a) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions réelles dont l'une est 0 et l'autre est α . 0,5pt
 (b) Montrer que $g(x) = 0$ équivaut à $x = h(x)$. 0,25pt
3. (a) Montrer que $-1,60 < \alpha < -1,59$. 0,5pt
 (b) Montrer que $h([-2; -1]) \subset [-2; -1]$. En déduire que $u_n \in [-2; -1]$. 0,5pt
 (c) Montrer que pour tout $x \in [-2; -1]$, $|h'(x)| \leq 0,8$. 0,25pt
4. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,8|u_n - \alpha|$ et que $|u_n - \alpha| \leq (0,8)^n$. 0,5pt
 (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite. 0,5pt
 (c) Déterminer n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près. 0,5pt
5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x . 0,25pt

PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES (5 points)

Situation

Un élève de Terminale D vivant dans un quartier à Yaoundé, doit se rendre dans son Lycée chaque matin à 7h30. Pour cela, il utilise, selon les jours, deux moyens de transport : la moto ou le taxi. L'élève part tous les jours à 7h00 de son domicile et doit arriver à 7h20 à son lycée. Il prend la moto 7 jours sur 10 et le taxi le reste du temps. Le jour où il prend la moto, il arrive à l'heure dans 99,4% des cas et lorsqu'il prend le taxi, il arrive en retard dans 5% des cas. Un jour donné, l'élève est arrivé en retard au lycée. On choisit une date au hasard en période scolaire. Le chef de son quartier, décide de recenser les personnes contaminées d'un virus. Il compte qu'il y a 2% de la population contaminée par ce virus. De ce fait, il met à leur disposition un test de dépistage qui a les propriétés suivantes : La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test). La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test positif est de 0,97 % (spécificité du test). On fait passer une personne choisie au hasard de cette population. Deux amis ALI et ALAIN se disputent sur la probabilité que le test effectué sur cette personne choisie soit positif. ALI dit que cette probabilité vaut 0,0452 et ALAIN dit 0,0492. Pour fêter la réussite du test de dépistage, le chef du quartier achète une balle rebondissante à son fils. En train de jouer, il laisse tomber une balle à une hauteur $h_0 = 100$ (l'unité est le centimètre). La balle rebondit plusieurs fois et perd de l'énergie à chaque rebond. La hauteur atteinte à chaque rebond est égale aux $\frac{1}{5}$ de la hauteur du précédent rebond. On estime la balle immobile dès que la hauteur du rebond est inférieure à 1cm.

Tâches :

1. Quelle est la probabilité que l'élève soit rendu à l'école en taxi ? 1,5pt
2. Qui de ALI et ALAIN a raison ? 1,5pt
3. Quelle sera la distance parcourue par la balle juste avant son immobilisation ? 1,5pt