DRES- OUEST
Sous Section Mathématiques
EXAMEN : PROBATOIRE Blanc **SESSION : AVRIL 2022**
EPREUVE : MATHEMATIQUES **SERIES : D-TI**

PROPOSITION DU CORRIGE

<table>
<tr><td colspan="3">PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES</td></tr>
<tr><td>REFERENCES ET SOLUTIONS</td><td>BAREME</td><td>COMMENTAIRES</td></tr>
<tr><td colspan="3">EXERCICE 1</td></tr>
<tr><td>

I. Q.C.M

Numéro de la question	1)	2)	3)
Lettre correspondant à la Réponse	**C**	**b**	**Pas de réponse juste**

II. On donne (E): $2cos^2 2x + \left(1-2\sqrt{3}\right) cos2x - \sqrt{3} = 0$.

1) **Montrons que $\mathbf{(1+2\sqrt{3})^2 = 13 + 4\sqrt{3}}$.**

$$\left(1+2\sqrt{3}\right)^2 = 1 + 2\times 2\sqrt{3} + \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 1 + 12 + 4\sqrt{3} = 13 + 4\sqrt{3}$$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathbf{2x^2 + \left(1-2\sqrt{3}\right) x - \sqrt{3} = 0}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1-2\sqrt{3})^2 - 4\times 2\left(-\sqrt{3}\right) = 13 + 4\sqrt{3} = (1+2\sqrt{3})^2$$

Ainsi l'équation a deux solutions réelles $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+2\sqrt{3}-1-2\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2}$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+2\sqrt{3}+1+2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$

$$\boxed{S = \left\{-\frac{1}{2}; \sqrt{3}\right\}}$$

3) Déduisons la résolution dans $[\mathbf{0}; \mathbf{2\pi}[$ de l'équation (E).

On a (E): $2cos^2 2x + \left(1-2\sqrt{3}\right) cos2x - \sqrt{3} = 0$. En posant $X = \cos 2x$ l'équation devient : $2X^2 + \left(1-2\sqrt{3}\right) X - \sqrt{3} = 0$

</td><td>

1,5 pt

0,5 pt

1pt

</td><td>

0,5pt pour chaque valeur juste de la lettre correspondant à la question.
Pour la question 3) aucune valeur n'est juste car $\boldsymbol{A = bar\{(B,-3);(C,5)\}}$. Attribuez le point alloué à cette question au candidat.

0,5pt pour chaque valeur juste de $\boldsymbol{x}$.

</td></tr>
</table>

D'après la question 2) on $X = -\frac{1}{2}$ ou $X = \sqrt{3}$.

Si $X = -\frac{1}{2}$ alors $cos2x = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Ainsi $\begin{cases} 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ 2x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ ou \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

Or $x \in [0; 2\pi[$ ainsi :

- $0 \leq \frac{\pi}{3} + k\pi < 2\pi \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq k < \frac{5}{3} \Rightarrow k \in \{0; 1\}$

  Pour $k = 0,\ x = \frac{\pi}{3}$

  Pour $k = 1,\ x = \frac{4\pi}{3}$

- $0 \leq -\frac{\pi}{3} + k\pi < 2\pi \Rightarrow \frac{1}{3} \leq k < \frac{7}{3} \Rightarrow k \in \{1; 2\}$

  Pour $k = 1,\ x = \frac{2\pi}{3}$

  Pour $k = 2,\ x = \frac{5\pi}{3}$

Si $X = \sqrt{3}$ alors $cos2x = \sqrt{3}$ ce qui est impossible car $-1 \leq cos\alpha \leq 1,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{S_{[0;2\pi[} = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right\}}$$

1pt

0,25pt pour chaque solution dans $\mathbb{R}$.
0,25 pt pour deux solutions trouvées dans $[\mathbf{0}; \mathbf{2\pi}[$.

EXERCICE 2

Le tableau ci-dessous regroupe les notes de mathématiques des élèves d'une classe de première.

Notes	**[1 ;6[**	**[6 ;10[**	**[10 ;16[**	**[16 ;20[**	**Total**
Effectifs (n_i)	7	14	19	10	50
ECD	50	43	29	10	
Centre (c_i)	3.5	8	13	18	
$\boldsymbol{ni \times c_i}$	24.5	112	247	180	563.5
$\boldsymbol{n_i c_i^2}$	85.75	896	3211	3240	7432.75

1) Construction du polygone des effectifs cumulés décroissants de la série.	1.25pts	0,5 pt pour le tableau des effectifs cumulés décroissants. 0,75pt pour la courbe
2) Calculons la médiane de cette série Considérons les points $A(10,29)$, $B(16,10)$ et $M(me,25)$. On a : $\frac{x_M-x_B}{y_M-y_B}=\frac{x_A-x_B}{y_A-y_B} \Rightarrow \frac{me-16}{25-10}=\frac{10-16}{29-10} \Rightarrow me=-\frac{6\times15}{19}+16=\mathbf{11.26}$ **Calculons l'écart-type de cette série** - **Déterminons la moyenne :** $\overline{\boldsymbol{X}}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_i c_i = \mathbf{11.27}$ - **Déterminons la variance :** $V=\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_i c_i^2\right)-X^2=\mathbf{21.64}$ L'écart-type est donc $\sigma=\sqrt{V}=\sqrt{21.64}=\mathbf{4.65}$	1.5pt	0,25 pt pour la valeur exacte de la médiane ; 0,25 pt pour la démarche. 0,25 pt pour chaque valeur exacte de la moyenne et de la variance. 0,25 pt pour la valeur exacte de l'écart-type 0,25 pt pour la formule.

<table>
<tr>
<td>3.a) Déterminons le nombre de podiums possibles
$A_{50}^{3} = \frac{50!}{(50-3)!} = 50 \times 49 \times 48 = \mathbf{117\ 600}$ podiums possibles.
b) Nombre de podiums où le premier a obtenu une moyenne supérieur ou égale à 16/20
$\boldsymbol{N} = \mathbf{10} \times \boldsymbol{A_{49}^{2}} = \mathbf{23\ 520}$ podiums</td>
<td>0.5pt
0.75pt</td>
<td>0,25 pt pour la démarche ;
0,25 pt pour le résultat.
0,5 pt pour la formule ;
0,25 pt pour le résultat.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">EXERCICE 3</td>
</tr>
<tr>
<td>On donne la fonction f telle que $f(x) = \frac{2x}{3+x}$
1) Déterminons les limites de $\boldsymbol{f}$ en $-\infty$; $+\infty$ et en $-\mathbf{3}$ à gauche et à droite
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$; $\lim_{x\to-3^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to-3^+} f(x) = -\infty$
2) Déduisons que la courbe de $\boldsymbol{f}$ admet deux asymptotes à préciser
La courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $\boldsymbol{x} = \mathbf{3}$ car $\lim_{x\to-3^-} f(x) = +\infty$ et
$$\lim_{x\to-3^+} f(x) = -\infty$$
La courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $\boldsymbol{y} = \mathbf{2}$ car $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$ et
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$
3) Déterminons la fonction dérivée $\boldsymbol{f'}$ de $\boldsymbol{f}$.
On a $f'(x) = \frac{2(3+x)-2x}{(3+x)^2} = \frac{\mathbf{6}}{(\mathbf{3}+\boldsymbol{x})^{\mathbf{2}}}$
Sens de variation de $\boldsymbol{f}$
$\frac{6}{(3+x)^2} > 0$ alors $f'(x) > 0$ d'où f est croissante sur $]-\infty; -3[$ et sur $]-3; +\infty[$.
4) Dressons le tableau de variation de $\boldsymbol{f}$.
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-3</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>$+$</td><td>||</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>2 ↗ $+\infty$</td><td>||</td><td>$-\infty$ ↗ 2</td></tr>
</table>

5) Montrons que le point $\boldsymbol{A}(-\mathbf{3}; \mathbf{2})$ est centre de symétrie de la courbe de $\boldsymbol{f}$</td>
<td>1pt

0,5pt

1pt

0,5pt

0.5pt</td>
<td>0,25 pt pour chaque limite juste.
Aucune justification n'est exigée.

0,25 pt pour chaque asymptote trouvée.

0,5pt pour la valeur exacte de la dérivée
Sinon ; 0,25pt pour la démarche.

0,5pt pour le sens de variation.

.

0,25 pt pour la démarche ;
0,25 pt pour le résultat.</td>
</tr>
</table>

Il suffit demontrer que $f(2a-x)+f(x)=2b$ avec $a=-3$ et $b=2$ On a $x\in D_f \Rightarrow x\neq -3 \Rightarrow -x\neq 3 \Rightarrow -6-x\neq -3 \Rightarrow (2a-x)\in D_f$ Ainsi $f(-6-x)+f(x)=\frac{2(-6-x)}{3-6-x}+\frac{2x}{3+x}=\frac{12+2x}{3+x}+\frac{2x}{3+x}=\frac{4(3+x)}{3+x}=4=2\times 2$ **Donc le point $\boldsymbol{A(-3;2)}$ est centre de symétrie à la courbe de $\boldsymbol{f}$.**		
EXERCICE 4		
On donne la suite numérique (u_n) telle que $u_0=8$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+2$ **1) Calculons $\boldsymbol{u_1}$ et $\boldsymbol{u_2}$** On a $u_1=\frac{1}{2}u_0+2=\frac{1}{2}\times 8+2=\mathbf{6}$; $u_2=\frac{1}{2}u_1+2=\frac{1}{2}\times 6+2=\mathbf{5}$ **2) On pose $\boldsymbol{v_n=u_n-4}$. Montrons que $\boldsymbol{(v_n)}$ est une suite géométrique** On a $v_{n+1}=u_{n+1}-4=\frac{1}{2}u_n+2-4=\frac{1}{2}(u_n-4)=\boldsymbol{\frac{1}{2}v_n}$ Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\boldsymbol{q=\frac{1}{2}}$ et de premier terme $v_0=8-4=\mathbf{4}$ **3) Exprimons $\boldsymbol{v_n}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$** On a $v_n=v_0\times q^n=\boldsymbol{4\frac{1}{2^n}}$ **En déduisons que $\boldsymbol{u_n=4+\frac{4}{2^n}}$** On a $u_n=v_n+4=4\frac{1}{2^n}+4=\boldsymbol{4+\frac{4}{2^n}}$ **4) On pose $\boldsymbol{S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n}$. Exprimons $\boldsymbol{S_n}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$** On a $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n=v_0+4+v_1+4+\ldots+v_n+4$ $=(v_0+v_1+\ldots+v_n)+(4+4+\ldots+4)$ $=v_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}+4(n+1)=8\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)+4(n+1)$ Don $\boxed{\boldsymbol{S_n=8\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)+4(n+1)}}$	0.5pt 1pt 1pt 1pt	**0,25 pt pour chaque valeur juste de $\boldsymbol{u_1}$ et $\boldsymbol{u_2}$.** **0,5 pt pour la démarche ;** **0,25 pt pour chaque valeur juste de la raison et du premier terme.** **0,5 pt pour l'expression exacte de $\boldsymbol{v_n}$;** **0,25 pt pour l'expression $\boldsymbol{u_n=v_n+4}$;** **0,25 pt pour le résultat.** **0,5 pt pour l'expression exacte de $\boldsymbol{S_n}$;** **0,5 pt pour la démarche.**
PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES		
REFERENCES ET SOLUTIONS	CRITERES	INDICATEURS ET BAREMES
Tâche 1 : Vérifions si Ambassa a fait un bon choix de la banque Posons S_n la somme que Ambassa a dans le compte de la banque à intérêt annuel de 3.5% et $S_0=5\ 000\ 000$	**C_1 : Interprétation correcte de la**	**0,25 pt pour l'évocation de $\boldsymbol{S_2}$; 0,25 pt pour l'évocation la comparaison.**

- <u>Déterminons la somme S_1 après un an.</u> On a $S_1 = S_0 + \frac{3.5}{100}S_0 = 5\ 000\ 000\left(1+\frac{3.5}{100}\right) = \mathbf{5\ 175\ 000}$ **FCFA** - <u>Déterminons la somme S_2 au terme de la deuxième année.</u> On a $S_2 = S_1 + \frac{3.5}{100}S_1 = 5\ 175\ 000\left(1+\frac{3.5}{100}\right) = \mathbf{5\ 356\ 125\ FCFA}$ **Comme $\mathbf{5\ 408\ 000\ FCFA > 5\ 356\ 125 FCFA}$ alors, Ambassa a fait un bon choix de la banque**	**situation**	**Appréciez d'autres méthodes comme la comparaison des taux d'intérêts.**
	C_2 : Utilisation correcte des outils	**0,25 pt pour la valeur exacte de $\boldsymbol{S_1}$; 0,25 pt pour la valeur exacte de $\boldsymbol{S_2}$;**
	C_3 : Cohérence	**0,5 pt pour le bon enchainement (démarche, unité et conclusion).**
Tâche 2 : Déterminons les dimensions du terrain d'Ambassa Posons x la longueur du terrain et y sa largeur. - L'aire du terrain est $xy = 529 \Rightarrow y = \frac{529}{x}$ - <u>Exprimons le périmètre $P(x)$ du terrain en fonction de x :</u> $P(x) = 2(x+y) = 2(x+\frac{529}{x})=\mathbf{2}\times\frac{\boldsymbol{x^2+529}}{\boldsymbol{x}}$ - <u>Minimisons le périmètre $P(x)$:</u> On a $P'(x) = 2\times\frac{2x^2-x^2-529}{x^2} = 2\times\frac{x^2-529}{x^2}$ $P'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 529 = 0 \Rightarrow x = 23\ ou\ x = -23$ Or $x > 0$ alors $P'(x)$ s'annule en $x = 23$. Ainsi, $P'(x) < 0,\ \forall x < 23$ et $P'(x) > 0,\ \forall x > 23$. Donc la valeur minimale du périmètre du terrain est obtenue pour $x = 23\ m$ ainsi $y = \frac{529}{23} = 23\ m$. <u>Conclusion</u> : Le **terrain d'Ambassa est un carré de côté $\boldsymbol{23\ m}$**	**C_1 : Interprétation correcte de la situation**	**0,25 pt pour l'expression du périmètre en fonction d'une seule inconnue; 0,25 pt pour l'évocation de la dérivée $\boldsymbol{P'(x)}$**
	C_2 : Utilisation correcte des outils	**0,25 pt pour le calcul de l'abscisse du point en qui la dérivée s'annule ; 0,25 pt pour le résultat de y qui est 23.**
	C_3 : Cohérence	**0,5 pt pour le bon enchainement (démarche, unité et conclusion).**
Tâche 3 : Montant minimal qu'Ambassa doit prévoir pour la construction de l'enclos. - Déterminons la nature de l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 234$	**C_1 : Interprétation correcte de la situation**	**0,25 pt pour l'évocation de la recherche de la nature de l'ensemble des points M du plan; 0,25 pt pour l'évocation du calcul du périmètre de la clôture.**

Soit I milieu du segment $[AB]$. On a : $$MA^2+MB^2=234 \Rightarrow \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=234$$ $$\Rightarrow MI^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}+IA^2+MI^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}+IB^2=234$$ $$\Rightarrow 2MI^2+2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)=234-IA^2-IB^2$$ Or $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$, ainsi $2MI^2=234-2IA^2=234-162=72 \Rightarrow MI^2=36 \Rightarrow$ $\boldsymbol{MI=6}$ Donc l'ensemble des points M du plan est le cercle de centre $\boldsymbol{I}$ et de rayon $\boldsymbol{6\ m}$. - Le périmètre de la clôture est $P=2\pi r=2\pi\times 6=\boldsymbol{12\pi\ m}$ - Le coût de construction de l'enclos est de $C=3\times P\times 1\ 600=57\ 600\pi=$ $\boldsymbol{181\ 440}$ **Conclusion : Ambassa doit prévoir au minimum $\boldsymbol{181\ 440\ FCFA}$ pour la construction de l'enclos afin de protéger son bétail.**	**C_2 : Utilisation correcte des outils** **C_3 : Cohérence**	**0,25 pt pour la nature exacte de l'ensemble des points M du plan ; 0,25 pt pour la valeur 181440.** **0,5 pt pour le bon enchainement du raisonnement (démarche et unité).**
NB : Le point réservé à la présentation porte sur l'ensemble de toute la copie du candidat.	**Présentation**	**0,25 pt pour la lisibilité** **0,25pt pour l'orthographe et la grammaire**

Proposé par le département des Mathématiques du Lycée Bilingue de ZENMEH (Menoua) et Lu par L'IPR NJOUKEKANG