MINESEC
DELEGATION REGIONALE DE L'OUEST
INSPECTION REGIONALE CHARGEE DE L'ENSEIGNEMENT DES SCIENCES
SOUS SECTION MATHEMATIQUES
EVALUATION N°2 TRIMESTRE II

Année scolaire 2020-2021
Classe :T^{le}D
Epreuve de Mathématiques
Coefficient : 04 Durée : 3h

A- EVALUATION DES RESSOURCES : (15,5pts)

Exercice 1 : 5 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct$(O,\vec{U},\vec{V})$. On considère la transformation plane S dont l'écriture complexe est $\boldsymbol{z' = \frac{1+i}{2}z}$. On définit, pour tout entier naturel$n$, la suite des nombres complexes (z_n) par :$\begin{cases} \boldsymbol{z_0 = 4} \\ \boldsymbol{z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n} \end{cases}$. On désigne par r_n le module du nombre complexe z_n et par α_n un argument de z_n.

1- Donner la nature et les éléments caractéristiques de S **0,5pt**
2- Calculer z_1, z_2 et z_3, puis placer les points A_1 et A_2 dans le repère $(O,\vec{U},\vec{V})$ **1pt**
3- Démontrer que le triangle OA_0A_1 est isocèle rectangle en A_1 **0,5pt**
4- Démontrer que la suite (r_n) est géométrique, puis exprimer r_n en fonction de n **0,5pt**
5- Démontrer que la suite (α_n) est arithmétique, puis exprimer α_n en fonction de n **0,5pt**
6- En déduire que pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{z_n = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{4}}}$. **0,5pt**
7- On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points $A_1, A_2, A_3, \dots$ et A_n. Ainsi, $\boldsymbol{L_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n}$.
   a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{A_nA_{n+1} = r_{n+1}}$ **0,5pt**
   b. Montrer que pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{L_n = (4+4\sqrt{2})\left[1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right]}$ **0,5pt**
   c. Déterminer alors la limite de la suite (L_n) **0,5pt**

Exercice 2 : 8,25 points

On considère les fonctions f et g définies sur l'ensemble IR des nombres réels par $\boldsymbol{f(x) = x + 1 + xe^{-x}}$ et $\boldsymbol{g(x) = 1 - x + e^x}$. On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.

1- .
   a. Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variations **1pt**
   b. En déduire que pour tout nombre réel x, $g(x) > 0$ **0,25pt**
2- Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$ **0,5pt**
3- Démontrer que la fonction f est dérivable sur IR et démontrer que, pour tout réel x, $\boldsymbol{f'(x) = g(x)e^{-x}}$ où f' est la dérivée de la fonction f. En déduire le tableau de variations de la fonction f. **1,5pt**
4- Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur IR et $-1 < \alpha < 0$ **0,75pt**
5- .
   a. Démontrer que la droite $(T) : y = 2x + 1$ est la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0 **0,5pt**
   b. Étudier la position relative de la courbe (C) et de la droite (T) **0,75pt**
6- Étudier les branches infinies de la fonction f **0,75pt**
7- Tracer soigneusement la courbe de f et la tangente (T) **1pt**
8- À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive de xe^{-x} sur IR **0,75pt**
9- On note D le domaine délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine D **0,5pt**

Exercice 3 : QCM (2,25pts)

Répondre par « vrai » ou « faux » (aucune justification n'est demandée)

1- $\int_{-3}^{3} \frac{1-e^x}{1+e^x}dx = 0$ **0,75pt**
2- *Toute suite décroissante et majorée converge* **0,5pt**
3- L'équation $2^x + 3^x = 7^x$ admet plus d'une solution sur l'intervalle $[0; +\infty]$ **1pt**

B- EVALUATION DES COMPETENCES : (4,5pts)

On munit un plan spatiale d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Un astronaute d'une station d'observation spatiale note les positions A et B de deux nouvelles étoiles où les affixes des points A et B sont solutions de l'équation (E): $z^2 + (-7 + i)z + 12 - 16i = 0$ et indique que le triangle ABO est rectangle en O.

Pour mieux étudier ces nouvelles étoiles la NASA décide de mettre sur orbite un satellite suivant la trajectoire décrite par la courbe de la fonction $f: x \mapsto lnx + x$, mais la station d'observation spatiale signale la présence d'une commette se déplaçant en ligne droite, dans le même plan de lancement du satellite, suivant la droite d'équation $y = -1$.

M. Ali, mathématicien de la NASA a acheté un terrain délimité sur la carte muni d'un repère orthonormé par la courbe de la fonction $g: x \mapsto \frac{1}{e^{-2x}+1}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = ln2$. On note que l'aire d'un domaine délimité par la courbe d'une fonction positive h, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est donnée par : $\mathcal{A} = H(b) - H(a)$ avec $b > a$, où H est une primitive de la fonction h.

1. En bon élève de la classe de Tle D, approuvez-vous les données de l'astronaute ? 1.5pt
2. Y'a-t-il une possible collision entre la commette et le satellite? 1.5pt
3. Déterminer l'aire sur la carte du terrain acheté par M. Ali. 1.5pt

---

« VOTRE LIMITE ? VOUS-MEME »

Examinateur : M. René A. DONGMO