MINISTERE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
LYCEE BILINGUE DE YAOUNDE

Examen : Baccalauréat Blanc, Session 2021
Série : TI
Epreuve : Mathématiques
Durée : 4H ; Coef : 4.

EVALUATION DES RESSOURCES

EXERCICE 1 : 10pts

1- P est un polynôme complexe défini par : $P(z) = z^3 + 3iz - 5 + 5i$.

a) Vérifier que le nombre complexe $z = -1 - i$ est une racine de P. 1pt

b) Ecrire P sous la forme d'un produit de polynômes complexes ; l'un de premier degré et l'autre de second degré. 1pt

c) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$. 1,5pt

2- Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On donne les points $A(Z_A = -1 - i)$; $B(Z_B = 2 - i)$ et $C(Z_C = -1 + 2i)$.

a) Déterminer l'ensemble $(\mathcal{D})$ des points $M(z)$ qui vérifie la relation : $|z - 2 + i| = |z + 1 - 2i|$, puis vérifier que le point A appartient à $(\mathcal{D})$. 1pt

b) Donner la forme algébrique du nombre complexe $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$; puis la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB})$. 1pt

c) En déduire la nature exacte du triangle ABC. 1pt

3- On considère la similitude directe S de centre B qui transforme A en C.

a) Donner l'écriture complexe, puis l'expression analytique de S. 1,5pt

b) $(\mathcal{C})$ est le cercle circonscrit à ABC, donner les caractéristiques de $(\mathcal{C}')$, image de $(\mathcal{C})$ par S. 1pt

c) Représenter le triangle ABC, l'ensemble $(\mathcal{D})$ des points $M(z)$, les cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ 1pt

EXERCICE 2 : 10pts

E est un plan vectoriel réel dont une base est $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit f un endomorphisme de E dont la matrice dans la base B ci-dessus est $A = \begin{pmatrix} m-4 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & m \end{pmatrix}$ où m est un paramètre réel.

1. Déterminer les valeurs de m pour que f soit un automorphisme de E. 1pt

On prend $m = 1$ pour la suite de l'exercice.

2. (a) Déterminer $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$. 1pt

(b) Déterminer le noyau de f , puis en donner une base. 1,5pt

(c) Déterminer l'image de f, puis en donner une base. 1,5pt

3. on pose $\vec{u} = \vec{\imath} + \sqrt{3}\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = \sqrt{3}\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ deux vecteurs de E.

(a) Montrer que $B' = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de E. 1pt

(b) Montrer que la matrice de f dans la base B' est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. 1pt

(c) Calculer M^2 et M^3. 1pt

(d) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, on a $M^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$. 0,5 pt

4. Soient $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice unité d'ordre 2 et $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice nulle d'ordre 2.

(a) Montrer que $2M = M^2 + M^3$ 0,5pt

(b) En déduire que $M \times (M^2 + M - 2I) = O$. 0,5pt

(c) La matrice $M^2 + M - 2I$ est-elle inversible ? 0,5pt

EXERCICE 3 : 10,5pts

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$. On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère ortho normal $(O;\ \vec{\imath};\vec{\jmath})$. Unité graphique 2cm.

1- Etudier la limite de la fonction f en $-\infty$ puis en $+\infty$. (on pourra écrire $(xe^{x-1} = \frac{1}{e}xe^{x})$. 0,5pt

2- (a) Calculer la dérivée première f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f. 1pt

(b) Dresser le tableau de variation de f', calculer $f'(1)$ et déduire le signe $f'(x)$ pour tout réel x. 1,5pt

(c) Dresser le tableau de variation de la fonction f. 0,5pt

(d) Calculer l'aire du domaine délimité par $(\mathscr{C})$, l'axe de abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 1$. 1pt

3- Soit I l'intervalle [1,9 ; 2]. Démontrer que, sur I, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution $\propto$. 1pt

4- On considère la fonction h définie sur I par $h(x) = 1 + \ln(2 + \frac{1}{x})$.

(a) Démontrer que, sur I, l'équation $f(x) = 0$ équivaut à l'équation $h(x) = x$. 0,5pt

(b) Etudier le sens de variation de h sur I et démontrer que, pour tout $x \in I$, $h(x) \in I$. 1pt

(c) Démontrer que pour tout réel x de I, $|h'(x)| \leq \frac{1}{9}$. 1pt

(d) Soit (U_n) une suite numérique définie par $U_0 = 2$ et pour tout nombre entier naturel n, $U_{n+1} = h(U_n)$.

i. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $1,9 \leq U_n \leq 2$. 1pt

ii. Démontrer que pour tout entier naturel n, $|U_{n+1} - \propto| \leq \frac{1}{9}|U_n - \propto|$. 0,5pt

iii. En déduire, par un raisonnement par récurrence, que : pour tout entier naturel n, $|U_n - \propto| \leq (\frac{1}{9})^n \times \frac{1}{10}$. 0,5pt

iv. En déduire que la suite (U_n) converge et préciser sa limite. 0,5pt

EVALUATION DES COMPTENCES : 9pts

Pour la fin d'année 2020, un opérateur de téléphonie mobile lance une tombola par tirage au sort, dont la participation est conditionnée, pour chaque client, à l'utilisation d'un crédit de communication prépayé de 5500 frs CFA. L'opérateur enregistre 1 815 600 participants (chaque client n'est enregistré qu'une seule fois). Les lots mis en jeux sont : 05 véhicules, 40 motos, 100 congélateurs, 200 ventilateurs, 1 000 clés USB et 4000 tee-shirts coutant respectivement 7 500 000 frs CFA, 450 000 frs CFA, 215 000 frs CFA, 18 000 frs CFA, 5 000 frs CFA et 2000 frs CFA chacun. Raoul participe à cette tombola et remporte un des véhicules. Etant amateur de grande vitesse, roulant parfois jusqu'à 130km/h, Raoul veut se rassurer sur les performances de ce véhicule. La fiche technique lui renseigne entre autres caractéristiques, sur la consommation moyenne en carburant (8,5l pour 100km), mais aussi sur la distance de freinage en ligne droite comme l'indique le tableau ci-dessous.

Vitesse (km/h)	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Distance de freinage en ligne droite (m)	25	42	57	75	94	115	150	166	193

Il décide d'essayer sa nouvelle voiture sur un circuit ayant la forme d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure 120 km. Il fait le plein de son réservoir à raison de 590 frs CFA le litre.

1- En vous aidant de la loi de probabilité liée à la variable aléatoire qui représente le gain algébrique en frs CFA du joueur, dites pour qui, de l'opérateur ou du client, le jeu est-il avantageux. 3pts

2- Déterminer la distance de freinage qui serait nécessaire à Raoul lorsqu'il roule à sa vitesse maximale 3pts

3- En faisant le tour complet du circuit, déterminer la distance maximale qui sera parcourue. 3pts

Présentation : 0,5pt