COLLEGE PRIVE LAIC LES PHARAONS
Département de Mathématique

Année Scolaire 2021 – 2022
Classe : T^{le} D
Durée : 3h
Coef : 05
Evaluation : 4

EPREUVE DE MATHEMATIQUE

I. EVALUATION DES RESSOURCES (15pts)

Exercice 1 (7,5pts)

I) Résoudre dans R les équations ou les inéquations ci-après

a) $\ln(2x+1) = \ln(-2x-3)$ **0,5pt**

b) $\ln(2x-1) - \ln(-2x-3) \leq \ln(2x+2)$ **0,5pt**

II) Soit la fonction f : $\rightarrow \frac{x^3+x^2-5x-2}{(x-1)^2}$

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout $x \in R\backslash\{1\}, f(x) = ax+b+\frac{c}{(x-1)^2}$ **0,75pt**
2. En déduire la primitive de f sur $]-\infty, 1[$ **0,5pt**

III) On considère la fonction f de R dans R définie par $f(x) = 1+\frac{1}{x}+\ln x$

1) a) Calculer $f(1)$ **0,25pt**

c) Etudier les variations de f et déduire le signe de $f(x) sur\ ]0, +\infty[$ suivant les valeurs de s **1,5pts**

2) Soit la fonction g définie par : $g(x) = |x-1|\ln x$

a) Déterminer l'ensemble de définition de g et calculer les limites de g aux bornes de cet ensemble. **1,5pts**

b) Etudier les variations de g aux bornes de cet ensemble **1pt**

c) Représenter la courbe (Cg) dans un repère orthonormé du plan. **1pt**

Exercice 2 (4,5pts)

1) Linéariser cos $4x$ **0,75pt**

2) Déterminer les racines cubiques de l'unité. **1pt**

3) On considère l'équation $(E) : z^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)\ dans\ C$

a) Déterminer les solutions de (E) sous forme exponentielle . **1pt**

b) Ecrire les solutions de E sous forme algébrique. **0,75pt**

c) Déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{11\pi}{12}\ et\ \sin\frac{11\pi}{12}$ **1pt**

Exercice 3 (3pts)

Soit la suite (U_n) definie sur N^* par :

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul **1pt**

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq U_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

2. En déduire que la suite (U_n) est telle que

$8U_0 = 27U_3$ et $U_3 = \frac{20}{9}$. Calculer U_0, U_n , la raison de (U_n) et $T = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$ **2pts**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES : 04,5points

M. FOTSO a regroupé dans le tableau ci-dessous la production moyenne en tonne y d'un jardin de sa société en fonction du nombre d'années pendant 10 ans, par des calculs, il désire estimer la production en tonne de ce jardin la quinzième année si le couple $(x; y)$ formé de l'année x et de sa production y est solution de l'équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés.

Année (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Production (y_i)	3	4	5,1	6	7,5	8	9,4	10,5	11,5	13

Pour les travaux dans ce jardin, M. FOTSO utilise une machine fabriquée par une entreprise qui peut produire en un mois entre 0 et 50 machines. Le bénéfice mensuel de cette entreprise (exprimé en milliers de francs), est modélisé par la fonction B primitive qui **prend la valeur 5000 en 0** de la fonction b définie pour tout t machines par $\boldsymbol{b(t) = 3t^2 - 192t + 2484}$.
Ce jardin a une forme triangulaire dont les affixes des sommets sont les solutions de l'équation $\mathbf{z^3 + (3 - 8i)z + 16 - 2i}$, un des sommets étant repéré par son affixe $\mathbf{2 + 3i}$. Il souhaite le clôturer à l'aide d'un grillage dont le double-mètre coûte 3000f.

Tâches :

1- Aider M. FOTSO à déterminer sa production la quinzième année. **1,5pt**

2- Calculer le bénéfice maximal mensuel de l'entreprise. **1,5pt**

3- Quelle somme va dépenser M. FOTSO pour clôturer son jardin ? **1,5pt**