

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES : (15 points)

EXERCICE 1 : (3 points)

Soit f un endomorphisme d'un plan vectoriel E de base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, qui à tout vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ associe, le vecteur $\vec{u}' = f(\vec{u}) = (-2x + y)\vec{i} + (4x - 2y)\vec{j}$.

1. Donne la matrice M de f dans la base \mathcal{B} . 0,5pt
2. f est-il un automorphisme ? Justifie ta réponse. 0,5pt
3. Montre que $\ker f$ est une droite vectorielle dont une base est $\vec{e}_1 = \vec{i} + 2\vec{j}$. 0,5pt
4. Montre que $\text{Im } f$ est une droite vectorielle dont une base est $\vec{e}_2 = -\vec{i} + 2\vec{j}$. 0,5pt
5. Montre que (\vec{e}_1, \vec{e}_2) est une base de E , puis écris la matrice M' de f dans cette base. 1pt

EXERCICE 2 : (4 points)

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit une suite (U_n) par :
$$\begin{cases} U_0 = 0,5 \\ U_{n+1} = 3U_n \cos 2x + \sin^2 x \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$
 - (a) Montre que $U_1 = \frac{3}{2} - 2\sin^2 x$. 0,5pt
 - (b) Résous dans $]-\pi; \pi]$ l'équation $(E) : U_1 = 0$. 1pt
 - (c) Place les points images des solutions de (E) sur un cercle trigonométrique. 0,5pt
2. Dans la suite, on suppose que $x = \frac{\pi}{3}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $V_n = U_n - 0,3$.
 - (a) Montre que (V_n) est une suite géométrique ; précise son 1^{er} terme et sa raison. 1pt
 - (b) Exprime V_n , puis U_n en fonction de n . 0,5pt
3. On pose : $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$.
Exprime S_n en fonction de n . 0,5pt

EXERCICE 3 : (4 points)

On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 1}$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan.

1. Détermine le domaine de définition D_f de f et calcule les limites aux bornes de D_f . 1pt
2. (a) Vérifie que pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = 2 \frac{x^2 - x + 1}{(x^2 - 1)^2}$. 0,5pt
(b) Dresse le tableau de variations de f . 0,5pt
3. Ecris une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 2. 0,5pt
4. Précise les équations des asymptotes à (C_f) . 0,75pt
5. Tracer (C_f) , ses asymptotes et la tangente (T) . 0,75pt

EXERCICE 4 : (4 points)

Une urne contient cinq boules marquées respectivement : -2 ; -1 ; 0 ; 1 et 2 . On tire successivement trois boules de cette urne en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne.

1. Combien y-a-t-il de résultats possibles ? 0,5pt
2. On désigne par a, b et c les numéros portés par les boules tirées au 1^{er}, 2^{ème} et 3^{ème} tirage respectivement. A, B et C étant trois points du plan, on désigne par G le barycentre éventuel des points pondérés $(A; a), (B; b)$ et $(C; c)$.
Détermine le nombre de tirages tels que :
 - (a) G soit défini. 0,75pt
 - (b) Le polynôme P défini par $P(x) = x^2 + bx - c$ ait deux racines. 0,75pt
3. Pour la suite, on suppose que $a = -2, b = 1, c = 2$ et que le triangle ABC est rectangle en B tel que $BC = BA = 3cm$.
 - (a) Construis le point $I = \text{bar}\{(B;1), (C;2)\}$. 0,5pt
 - (b) Justifie que les points A, G et I sont alignés, puis construis le point G . 0,5pt
4. Soit (\mathcal{E}) l'ensemble des points M du plan tels que : $MB^2 + 2MC^2 = 45$.
 - (a) Vérifie que le point A appartient à (\mathcal{E}) . 0,25pt
 - (b) Détermine et trace (\mathcal{E}) . 0,75pt

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (5 points)

SITUATION

M. BELL est un Professeur des Lycées et a besoin d'une somme d'argent de 2.000.000 FCFA pour s'acheter un terrain d'une superficie de $400m^2$. Deux possibilités d'emprunt s'offrent à lui :

- ✓ **Possibilité 1** : Un groupe de tontine lui donne la somme pour deux ans avec un taux d'intérêt mensuel composé de 2%.
- ✓ **Possibilité 2** : Une banque lui prête cette somme pour deux ans aux conditions suivantes :
 - A la fin de du premier mois, il doit rembourser 240.000 FCFA ;
 - Puis chaque mois, il rembourse avec 10.000 FCFA de moins que le mois précédent.

Une classe de 1^{ère} C de **M. BELL** comporte n élèves ($n \geq 2$). On choisit au hasard et simultanément 2 élèves de cette classe pour la coopérative scolaire. On constate que le nombre total de choix possibles est égal à 231.

Tâches :

1. Calcule l'effectif de la classe de 1^{ère} C de **M. BELL**. 1,5pt
 2. Calcule la somme totale à rembourser par **M. BELL** s'il opte pour le groupe de tontine. 1,5pt
 3. Calcule la somme totale à rembourser par **M. BELL** s'il opte pour la banque. 1,5pt
- Présentation :** 0,5pt