MINISTERE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
COURS DE SOUTIEN DE L'EXCELLENCE
SAR / SM - EDEA Tel : 694 22 60 38

Date : 4 Février 2022
Niveau : Terminale C
Prof : Olivier TIAGHO

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES : CALCUL INTEGRAL [(1)]

EXERCICE 1

A) On se propose de calculer les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x \; dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x \; dx$.

1. Calculer $I + J$.
2. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I - J$.
3. En déduire les valeurs exactes de I et J.

B) Calculer les intégrales suivantes :

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x} \quad \text{et} \quad L = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin 2x}.$$

C) A l'aide de deux intégrations par parties, calculer le réel $M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x \; dx$.

EXERCICE 2 :

On donne les réels : $I = \int_0^{\pi} \cos^4 x \; dx$ et $J = \int_0^{\pi} \sin^4 x \; dx$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $I = \int_0^{\pi} \sin^2 x \; dx - \frac{1}{3}J$.
2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
$$J = \int_0^{\pi} \sin^2 x \; dx - \frac{1}{3}I.$$
3. En déduire que $I = J = \frac{3\pi}{8}$.

EXERCICE 3

Le but de cet exercice est le calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^3 x}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, on ait :
$$\frac{1}{\cos x} = \frac{a\cos x}{1-\sin x} + \frac{b\cos x}{1+\sin x}.$$ Déduire le calcul de I_0.
2. En utilisant une intégration par parties, montrer que : $2nI_n = \frac{2^n}{\sqrt{2}} + (2n-1)I_{n-1}$.
3. Atteindre alors le but de cet exercice.

EXERCICE 4

On se propose de calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\, dx$.

On pose $J = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$ et $K = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx$.

1. Soit h la fonction définie sur $[0;1]$ par $h(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)$.

   Calculer $h'(x)$, puis déduire J.

2. Vérifier que $K + 2J = I$, puis montrer en utilisant une intégration par parties que $I = \sqrt{3} - K$.
3. En déduire la valeur exacte de I.

EXERCICE 5

L'objectif de cet exercice est de calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \sqrt{x^2+3}\, dx$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - x + \sqrt{x^2+3}$. On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que f admet une réciproque f^{-1}.
2. Tracer la courbe (C) de f ainsi que celle de f^{-1}, notée (C').
3. Démontrer que $f^{-1}(x) = \frac{3-(x-1)^2}{2(x-1)}$ puis calculer $\int_2^{1+\sqrt{3}} f^{-1}(x)\, dx$.
4. En déduire $\int_0^1 f(x)dx$, puis déduire I.

EXERCICE 6

A)

1. Trouver trois réels a, b et c tels que $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$. Calculer $I = \int_1^2 \frac{dx}{x(x^2+1)}$.
2. En utilisant une intégration par parties, calculer $J = \int_1^2 \frac{2x\ln x}{(1+x^2)^2} dx$.

B) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose : $I_n = \int_1^e (\ln t)^n dt$.

1. Calculer I_1.
2. Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$I_n = e\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} + (-1)^n n!\,(e-1).$$