INSTITUT POLYVALENT BILINGUE LES PINTADES
Situé au Quartier Résidentiel en face de la CRTV
Adamaoua, derrière ELECAMB.P. 391 Ngaoundéré
Tel: 670683413/699613890/678421154
E-mail: ipblespintades@gmail.com

PINTADES BILINGUAL COMPREHENSIVE INSTITUTE. Situated at the residential quarter opposite CRTV
Adamaoua, behind ELECAM PO BOX:391 Ngaoundere
Phones: 670683413/699613890/678421154
E-mail: ipblespintades@gmail.com

Classe : $TleDC - Ti$ **Année scolaire : 2021-2022**

Travaux dirigés sur le CALCUL DES INTEGRALES

Calculs d'intégrales

Exercice 1

Calculer les intégrales I indiquées à l'aide d'une primitive.

$I = \int_0^4 (x-3)dx$. $I = \int_2^{-1}(t^2 - 4t + 3)dt$. $I = \int_1^2 \left(t^2 + t - \frac{1}{t}\right)dt$. $I = \int_1^4 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right)dx$

$I = \int_0^1 (2x+1)(x^2+x+1)dx$. $I = \int_0^2 \frac{3x}{(x^2+1)^2}dx$. $I = \int_0^1 (x-2)(x^2-4x+1)dx$.

$I = \int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{1+t}}$. $I = \int_1^2 \frac{t^3}{t^4+2}dt$. $I = \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{5-x}}$. $I = \int_0^3 \frac{dt}{(2t+1)^2}$. $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} costdt$. $I = \int_0^{\pi} sin2tdt$.

$I = \int_0^{\pi} sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)dx$. $I = \int_0^1 te^{t^2-1}dt$. $I = \int_{-1}^1 e^{3t+4}dx$. $I = \int_1^2 \frac{1}{3x+2}dx$.

$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} tantdt$. $I = \int_e^{e^2} \frac{1}{tlnt}dt$. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 tdt$. $I = \int_2^3 \frac{2x}{(x-1)(x+2)}dx$

Exercice 2

Calculer l'intégrale en utilisant les propriétés de l'intégration (relation de Chasles, linéarité).

a) $I = \int_1^e lntdt + \int_1^e \left(t + ln\frac{1}{t}\right)dt$.
b) $J = \int_1^e ln(1+t^2)dt + \int_e^1 ln(1+t^2)dt$.
c) $K = \int_1^{\frac{\pi}{6}} cos2tdt - \int_1^{\frac{7\pi}{6}} cos2tdt$

Exercice 3

Calculer les intégrales I à l'aide d'une intégration par parties

$I = \int_1^e xlnxdx$. $I = \int_1^{e^2} lntdt$. $I = \int_0^{\pi}(x-1)cosxdx$. $I = \int_0^1 (x+2)e^x dx$.

$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 3xsin3xdx$. $I = \int_0^1 (2x+1)e^{-x}$. $I = \int_1^2 (t-2)e^{2t}dt$. $I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$.

Exercice 4

Utiliser la parité des fonctions pour évaluer les intégrales proposées.

$I = \int_{-\pi}^{\pi}(sinx - x)dx$; $I = \int_{-1}^1 \frac{1-e^x}{1+e^x}dx$; $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx$; $I = \int_{-2}^2 \frac{t}{1+t^2+t^4}dt$.

Exercice 5

1.
   a) Calculer$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$.
   b) On se propose de calculer $I_2 = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx$. Calculer $I_1 + I_2$ et déduisez-en la valeur de I_2.

2. On souhaite calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin2x}{1+2sinx}dx$.
   a) Calculer$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{1+2sinx}dx$.
   b) Calculer $I + J$ et déduisez-en la valeur de I.

Problème type BAC

Problème 1

On note $K = \int_0^{\pi} e^x cos2xdx$, $I = \int_0^{\pi} e^x \cos^2 xdx$ et $J = \int_0^{\pi} e^x \sin^2 xdx$.

1. A l'aide d'une double intégration par parties, prouver que $K = \frac{e^{\pi}-1}{5}$.
2. Calculer $I + J$ et $I - J$.Déduisez-en les valeurs de I et J.
3. En exprimant $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$ à l'aide de $cos2x$, retrouver à l'aide de K les valeurs de I et J.

Problème 2

f est la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par$f(x) = ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)dx$.

1. Calculer $f'(x)$ puis déduisez-en$I = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$.
2. On pose $J = \int_{\sqrt{2}}^{2} \sqrt{x^2-1}dx$. A l'aide d'une intégration par parties, exprimer $I + J$ en fonction de J.
3. Déduisez-en la valeur de I.

Problème 3

1. g est la fonction sur $]1;+\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$.
a) Trouver des réels a, b , c tels que pour tout $> 1, g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$.
b) Déduisez-en une primitive G de g sur$]1;+\infty[$.
2. f est la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par$f(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$. Trouver une primitive F de f sur$]1;+\infty[$.
3. Utiliser les résultats précédents pour calculer $I = \int_2^3 \frac{2x}{(x^2-1)^2} lnxdx$. Donner le résultat sous la forme $pln2 + qln3$ avec p et$q$ rationnels.

Problème 4

On se propose d'encadrer l'intégrale : $I = \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x}dx$.

1. En étudiant les variations des fonctions u et v définies sur l'intervalle $[0;1]$ par : $u(x) = e^{-x} + x - 1$ et $v(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x}$; prouver que pour tout réel x dans$[0;1]$, $1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$ $[1]$.
2. Déduisez-en un encadrement de e^{-x^2} lorsque x est dans l'intervalle $[0;1]$ puis prouver que pour tout x dans l'intervalle $[0;1]$:

$$1 - x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq 1 - x + \frac{x^4}{2(1+x)} \qquad [2].$$

3.

a) Vérifier que pour tout x dans l'intervalle $[0; 1]$,
$\frac{x^4}{1+x} = x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{x+1}$.

b) Déduisez alors de [2] que : $\frac{1}{2} \leq I \leq \frac{5}{24} + \frac{1}{2}ln2$, puis donnez une valeur approchée de I à 3×10^{-2} près.

Problème 5

Pour tout entier naturel n, on considère les réels $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} sinxdx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} cosxdx$.

1. Calculer I_0 et J_0.
2. On suppose $n \geq 1$.

a) En intégrant par parties I_n, puis J_n, prouvez que : $\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-\frac{n\pi}{2}} \end{cases}$;

b) Déduisez-en les expressions de I_n et J_n en fonction de n.

3. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n$.

Problème 6

La figure ci-dessous est la représentation graphique dans un repère orthonormal de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^{-x}$. On note (u_n) la suite définie sur $\mathbb{R}$ par :$u_n = \int_n^{n+1} (x+1)e^{-x} dx$.

1.

a) Interpréter u_n géométriquement.

b) A l'aide d'une intégration par parties, calculer u_n en fonction de n.

c) La suite (u_n) est-elle convergente ?

2. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

Problème 7

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 + x - xe^{-x^2+1}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité graphique :$2cm$).

1. Prouver que $\mathcal{C}$ admet le point $I(1; 0)$ comme centre de symétrie.

2. Démontrer que $\mathcal{C}$ admet une asymptote (D) en $+\infty$ et préciser leur position relative.
3. Pour tout réel $\lambda, \lambda \geq 0$, $A(\lambda)$ désigne l'aire, exprimée en cm^2, du domaine défini par $\mathcal{C}$, (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.
   a) Exprimer $A(\lambda)$ en fonction de λ.
   b) Quelle est la limite A de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$?
   c) Déterminer un réel λ_0 tel que, lorsque $\lambda \geq \lambda_0$, alors$|A - A(\lambda)| \leq 10^{-2}$.

Problème 8

Tracer la courbe (C) de la fonction f dans un repère orthonormal (unité : $2cm$), puis calculer l'aire en cm^2 du domaine limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

a) $f(x) = 2 + x - x^2$; $a = 0$; $b = 1$.
b) $f(x) = \ln(x+1)$; $a = -\frac{1}{2}$; $b = 0$.
c) $f(x) = (x+1)e^{-x}$; $a = -1$; $b = ln2$.
d) $f(x) = \frac{6}{(2x+1)^2}$; $a = 1$; $b = 4$.

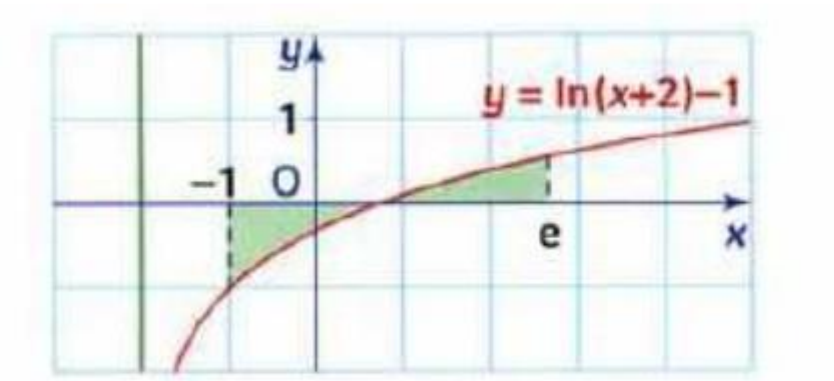
Problème 9

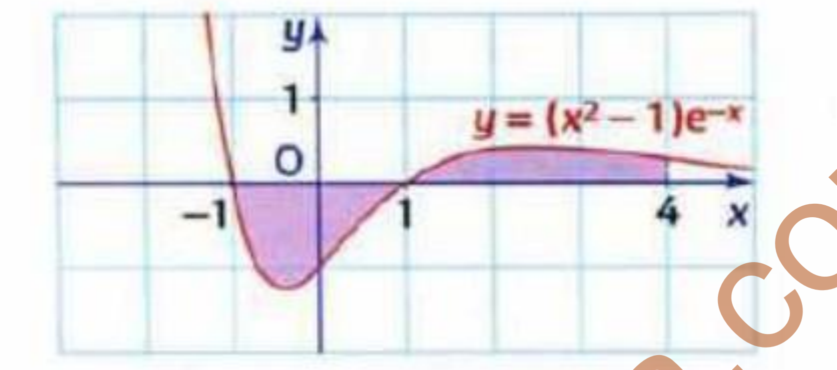
On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x+1)$ et $g(x) = e^x - 1$. On note (C_f) et (C_g) leurs courbes dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Vérifier que (C_f) et (C_g) ont une tangente commune Δ au point O. Préciser la position de (C_f) par rapport à Δ.
2. Prouver que (C_f) et (C_g) sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$
3. Soit a un réel, $a > 0$. On se propose de calculer de deux façons différentes le nombre : $I(a) = \int_0^e \ln(x+1)\,dx$.
   a) Tracer (C_f), (C_g) et Δ.
   b) Par des considérations sur les aires justifier que :
   $I(a) = aln(a+1) - \int_0^{\ln(a+1)} (e^x - 1)dx$.
   c) Déduisez-en $I(a)$.
   d) Retrouvez la valeur de $I(a)$ en effectuant une intégration par parties.

Problème 10

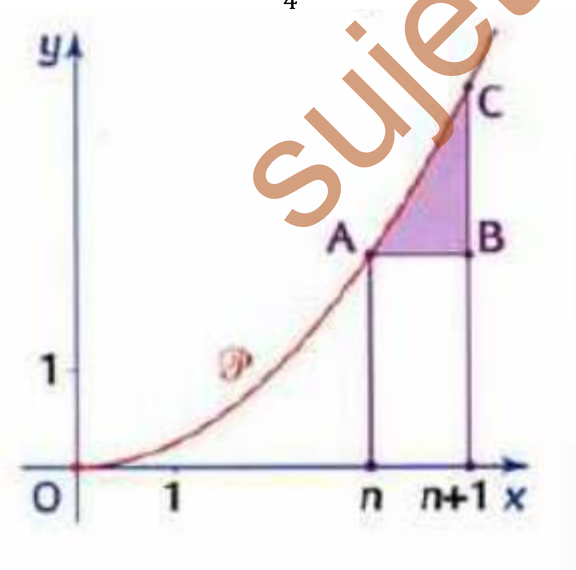
Calculer, en $u.a$, les aires des domaines colorés dans chaque cas.





Problème 11

$\mathcal{P}$ est la demi- parabole d'équation $y = \frac{1}{4}x^2$ avec x dans l'intervalle $[0; +\infty[$; n est un entier naturel. On note u_n l'aire du domaine limité par $\mathcal{P}$ et les droites d'équations $x = n + 1$ et $y = \frac{1}{4}n^2$.



Démontrer que la suite (u_n) est une suite arithmétique. Préciser sa raison.

Problème 12

f est la fonction définie sur $[0; 2]$ par $f(x) = (x - 2)e^x$ et (C) est sa courbe dans un repère orthonormal$(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ (unité graphique :$1cm$)

1. Etudiez les variations de f puis tracez (C).
2. S est la partie du plan comprise entre (C) et l'axe des abscisses. Calculer la valeur exacte de l'aire de S, puis donne une valeur approchée à 10^{-2} près.
3. En tournant autour de l'axe$(O;\vec{\imath})$, S engendre un solide de révolution de volume $\mathbb{V}$.
   a) Trouver des réels a, b et c tels que la fonction G définie par $G(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$ soit une primitive de f^2 sur $\mathbb{R}$.
   b) Déduisez-en la valeur exacte de$\mathbb{V}$, puis une valeur approchée à 10^{-3} près.

Problème 13

Prouvez que $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} = \frac{\pi}{8}$.

Examinateurs : *MM**, PEMHA, DONTSA, GEUFO, et CHACHOUANG***