Evaluation (Mars 2022) Classe : Tle C Durée : 4h Coeff : 7

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

L'épreuve comporte deux parties indépendantes sur deux pages, le candidat devra traiter chacune des parties. La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

Partie A : Evaluation des savoirs (15,5 points)

Exercice 1 : (5,5 points)

I-cryptographie

On assimile chaque lettre de l'alphabet à un nombre entier comme le montre le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1 3	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

La procédure de cryptage d'une lettre assimilée à un entier x compris entre 0 et 25 est la suivante :

Étape 1 : On calcule 17x + 5.

Étape 2 : On calcule le reste m de la division euclidienne de 17x + 5 par 27.

Étape 3 : On détermine à l'aide du tableau précédent la lettre correspondant à m.

1. En utilisant cette procédure de codage, codez le mot «B A C» **[0,75pt]**
2. Dans cette question, on se propose de déterminer une procédure de décodage.

(a) Montrez que pour tous les entiers relatifs x et m, $17x \equiv m[27]$ équivaut à $x \equiv 8m[27]$. **[0,75pt]**

(b) Déduisez-en que x est le reste de la division euclidienne de $8m - 40\ par\ 27$. **[0,75pt]**

(c) Décodez alors le mot de trois lettres «VV F M» **[0,75pt]**

II- théorème de Fermat

Le but de cette partie est d'étudier certaines propriétés de divisibilité de l'entier $4^n - 1$, lorsque n est un entier naturel. On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : «si p est un nombre entier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1} \equiv 0[P]$ ».

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n,4^n est congru à 1 modulo 3. **[0,25pt]**
2. Prouver à l'aide du petit théorème de Fermat, que $4^{28} - 1$ est divisible par 29. **[0,5pt]**
3. déterminer le reste de la division de 4^n par 17. En déduire que, pour tout entier k, le nombre$4^{4k} - 1$ est divisible par 17. **[0,75pt]**
4. Pour quels entiers naturels n le nombre $4^n - 1$ est-il divisible par 5 ? **[0,75pt]**
5. À l'aide des questions précédentes, déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28} - 1$. **[0,5pt]**

Exercice 2 (3,75 points)

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Unité graphique 2cm. Soit f la transformation du plan qui à tout point $M(x,y)$ associe le point $M'(x',y')$ telque : $\begin{cases} 4x' = x - \sqrt{3}\,y \\ 4y' = \sqrt{3}x + y \end{cases}$

1. a. Déterminer l'écriture complexe de f. **[0.25pt]**

b. Déterminer la nature et les éléments caractéristique de f **[0.75pt]**

2. Soit (Γ) l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que : $7x^2 + 13y^2 - 6\sqrt{3}\,xy = 64$ et (Γ') son image par f.

a. Déterminer une équation cartésienne de (Γ'). **[0.5pt]**

b. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (Γ'). **[0.5pt]**

c. En déduire que (Γ) est une ellipse dont on précisera le centre, les foyers, les sommets et l'excentricité. **[0.75pt]**

PROBLEME (6,5 points)

On considère la fonction numérique f définie sur R par : $f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1. Calculer limite de la fonction f en $-\infty$ puis en $+\infty$. **[0,5pt]**

2. a. Calculer la dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f. **[0,5pt]**

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f' en précisant la limite de la fonction f' en $-\infty$. **[0,5pt]**

c. Calculer $f'(1)$ et en déduire le signe de f' pour tout réel x. **[0,5pt]**

d. Dresser le tableau de variation de la fonction f. **[0,5pt]**

3. Soit I l'intervalle [1,9 ;2]. Démontrer que, sur I, l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique, α. **[0,5pt]**

4. On considère la fonction g définie sur l'intervalle I par : $g(x) = 1 + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$.

a. Démontrer que, sur I, l'équation $f(x) = 0$ équivaut à l'équation $g(x) = x$. **[0,25pt]**

b. Étudier le sens de variation de la fonction g sur I et démontrer que pour tout $x$appartenant à I, $g(x)$ appartient à I. **[0,5pt]**

c. Démontrer que, pour tout x de l'intervalle I, $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$. **[0,5pt]**

d. Soit (U_n) la suite de nombres réels définie par : $U_0 = 2$ et, pour tout n de ℕ, $U_{n+1} = g(U_n)$.

i. Démontrer que tous les termes de cette suite appartiennent à l'intervalle I. **[0,5pt]**

ii. Démontrer que, pour tout n de ℕ, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9}|U_n - \alpha|$. **[0,5pt]**

iii. En déduire, en raisonnant par récurrence, que : pour tout n de ℕ,
$|U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^n \times \frac{1}{10}$. **[0,5pt]**

iv. En déduire que la suite (U_n) converge et préciser sa limite. **[0,5pt]**

v. Déterminer n pour que α soit une valeur approchée de la limite de$(U_n)_n$ à 10^{-6} près. **[0,5pt]**

5. Par une intégration par partie, calculer l'intégrale $J = \int_0^1 x\, e^{x-1} dx$ et déduire J=$\int_0^1 f(x)\, dx$. **[0,75pt]**

PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES (4,25 points)

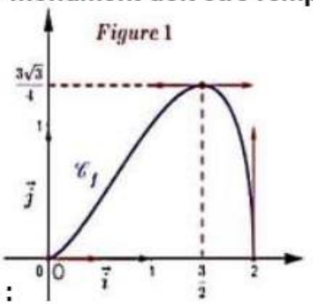
Dans le village de Mr ALAIN, 60% des familles ont une voiture, 65% des familles ont un téléviseur et 24% des familles n'ont ni voiture ni téléviseur. Pour aider les familles nécessiteuses, une ONG aimerait calculer la probabilité pour qu'une famille choisie au hasard ait une voiture sachant qu'elle possède un téléviseur. Elle vous sollicite pour votre expertise.

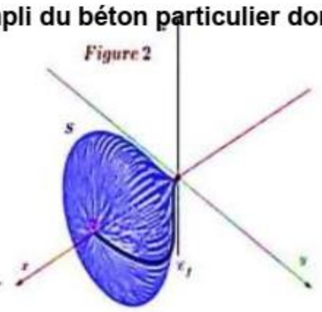
ALAIN décide de construire chez lui un objet d'art ayant la forme de l'oignon représenté par la figure ci-contre. Pour ce faire, l'ingénieur considère la surface à réaliser son objet d'art comme un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 2m. L'ingénieur trace la courbe représentative de la fonction numérique $f(x) = x\sqrt{2x - x^2}$ sur **[0 ;2]** puis il opère la rotation de (C_f) autour de l'axe $(O, \vec{\imath})$ engendrant le Solide S (l'oignon)**(figure 2).**

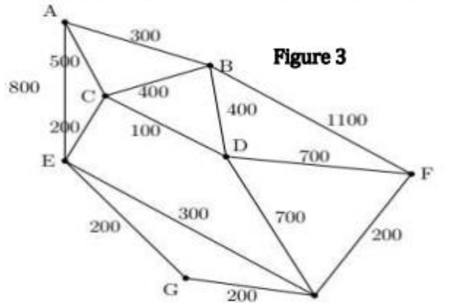
Des contraintes de calendrier imposent un concert dans la ville F immédiatement. Il se trouve présentement dans la ville A. Sur le graphe ci – contre les valeurs représentent les longueurs en kilomètres de chaque tronçon. **(figure 3).**

sujetexa.com

NB : Ce monument doit être rempli du béton particulier dont le mètre cube coulé vaut 50000FCFA.







Tâches :

1. Calculer la probabilité que cette famille choisie au hasard ait une voiture sachant qu'elle possède un téléviseur. **[1,5 pt]**
2. Déterminer la somme à prévoir par ALAIN pour son monument. **[1,5 pt]**
3. Déterminer en utilisant un algorithme dont on précisera le nom le chemin le plus court et sa longueur pour aller de la ville A à la ville F. **[1,25 pt]**

Bonne chance !

EXAMINATEUR : ATEUFACK NZEKO

sujetexa.com