

Fiche de travaux dirigés

Chapitre études générales des fonctions



Etudes de fonctions

Exercice 1:

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) .

1. Etudier la fonction numérique $f : x \mapsto x^2 - 2x + 3$
2. Etudier la fonction numérique $f : x \mapsto x^3 - 3x + 1$
3. Etudier la fonction numérique $f : x \mapsto -2x^3 - 2x$

Exercice 2:

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative.

1. a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f .
c) En déduire les asymptotes à $(\mathcal{C}_f)$.
2. On suppose que les asymptotes à $(\mathcal{C}_f)$ sont les droites d'équations $x = 1$ et $y = 2$.
a) Préciser le point d'intersection de ces deux asymptotes.
b) Démontrer que le point d'intersection de ces deux asymptotes est centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.
- 3.a) Déterminer la dérivée de f et dresser son tableau de variation
b) Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé (O, I, J) .

Exercice 3:

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative.

1. a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f .
c) En déduire que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote (D) dont on précisera l'équation.
2. a) Déterminer les réels a , b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x}$
b) En déduire que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique (L) dont on précisera l'équation.
c) Etudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et (L) .
d) Déterminer le point d'intersection de (D) et (L) puis montrer que ce point est centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.
- 3.a) Déterminer la dérivée de f et dresser son tableau de variation
b) Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé (O, I, J) .

Exercice 4

f est la fonction de variable réelle x définie dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$. On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f .

1. a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
b) En déduire l'équation (Δ) de l'asymptote verticale à $(\mathcal{C}_f)$.
c) Calculer la dérivée f' de f .
d) En déduire le tableau de variation de f .
2. a) Déterminer les réels a , b et c tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on ait $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$
b) En déduire que la droite $(\Delta') : y = x - 2$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$.
c) Déterminer les positions de $(\mathcal{C}_f)$ et (Δ') .

- d) Déterminer les coordonnées du point Ω intersection de (Δ') et (Δ) , puis démontrer que Ω est centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.
3. Tracer $(\mathcal{C}_f)$.
4. En utilisant la courbe $(\mathcal{C}_f)$, déterminer l'ensemble des réels λ pour lesquels l'équation $x^2 - (3 + \lambda)x + \lambda + 6 = 0$ admet deux solutions de signes contraires.

Exercice 5:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x}$. $(\mathcal{C})$ désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J) . Unité sur les axes: 1cm

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2. Démontrer que la droite $(D) : y = \frac{1}{2}x$ est asymptote à $(\mathcal{C})$. Préciser une équation de l'autre asymptote.
3. Soit Ω le point d'intersection des asymptotes à $(\mathcal{C})$.
Montrer que le point Ω est centre de symétrie de $(\mathcal{C})$.
4. Construire $(\mathcal{C})$.
5. Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{x^2}{2x - 2}$
 - a) Calculer $g(x) - f(x - 1)$.
 - b) En déduire alors comment déduire la courbe $(\mathcal{C}')$ à partir de $(\mathcal{C})$.
On ne demande pas de construire $(\mathcal{C}')$

Exercice 6:

Partie A:

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par: $g(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{2 - x}$ et $(\mathcal{C}_g)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Déterminer les réels a , b et c sachant que $(\mathcal{C}_g)$ passe par les points $A(1; -2)$ et $B(4; \frac{5}{2})$ et admette au point A une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Partie B:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par: $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentation graphique dans un repère orthonormé (O, I, J) .

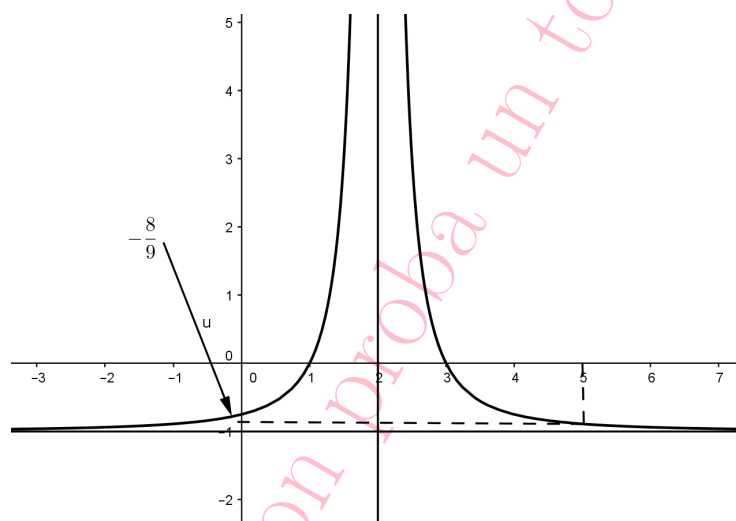
1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Calculer $f'(x)$ et donner le sens de variation de f .
3. Dresser le tableau de variation de f .
4. Déterminer les réels a , b et c tels que pour tout $x \neq 2$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}$.
5. En déduire que $(\mathcal{C}_f)$ admet deux asymptotes dont on précisera les équations.
6. Montrer que le point $\Omega(2; 0)$ est centre de symétrie à $(\mathcal{C}_f)$.
7. Tracer $(\mathcal{C}_f)$ et ses asymptotes.
8. Déterminer graphiquement et suivant les valeurs du réel λ , le nombre et le signe des solutions de l'équation $-x^2 + (\lambda + 4)x - 5 - 2\lambda = 0$.
9. Soit h la fonction numérique définie par: $h(x) = f(|x|)$ et $(\mathcal{C}_h)$ sa courbe représentative.
 - a) Donner le programme de construction de $(\mathcal{C}_h)$.
 - b) Construire $(\mathcal{C}_h)$.
 - c) Dresser le tableau de variation de h .

Exercice 7:

I/ Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système
$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ 16x + 4y + z = -5 \\ -5x + 2y + z = 8 \end{cases}$$

II/ La courbe ci-dessous désigne la courbe représentative de la dérivée f' d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. En utilisant la courbe, répondre aux questions suivantes:

1. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$.
2. Dresser le tableau de signe de $f'(x)$ puis donner le sens de variation de f .
3. On suppose que $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 2}$ où a, b et c sont des réels et $(\mathcal{C}_f)$ désigne la courbe de f .
 - a) Calculer $f'(x)$ en fonction de a, b et c .
 - b) Sachant que $f(4) = -\frac{5}{2}$, montrer que les réels a, b et c vérifient le système de la question I/ et en déduire leurs valeurs.
 - c) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
 - d) Dresser le tableau de variation de f .
 - e) Déterminer les réels α, β et γ tels que pour tout $x \neq 2$, $f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x - 2}$.
 - f) En déduire que $(\mathcal{C}_f)$ admet deux asymptotes que l'on précisera.
 - f) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ et ses asymptotes.



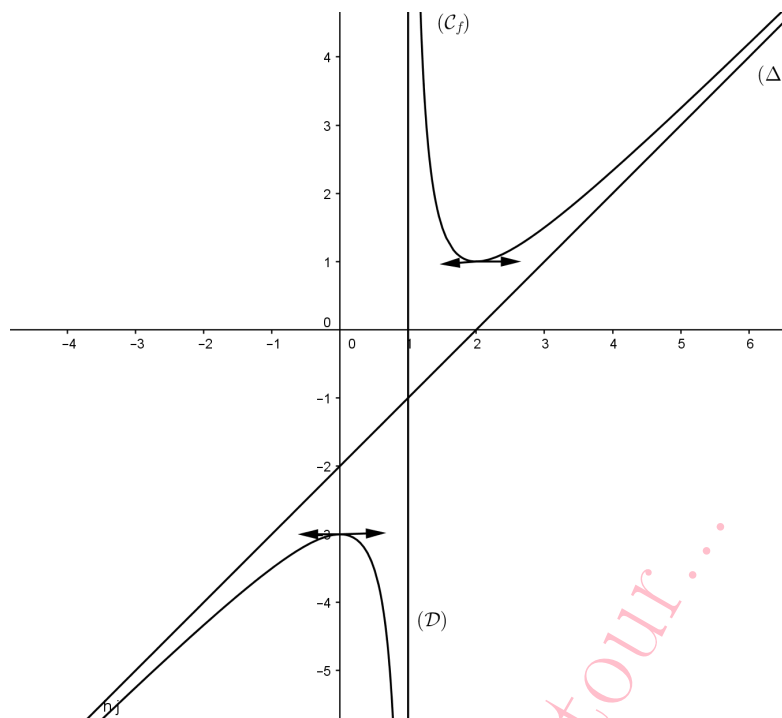
Exercice 8:

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système
$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ y - z = -3 \\ x - z = 0 \end{cases}$$
2. La courbe ci-dessus est celle de la fonction f de courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. f est définie par: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$ où a, b et c sont des réels donnés.
 - a) Donner l'ensemble de définition de f .
 - b) Dresser le tableau de variation de f .
 - c) Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 0$.
 - d) Discuter suivant les valeurs du nombre réel m le nombre et le signe des solutions de l'équation $f(x) = m$.
 - e) Déterminer à partir de la courbe de f : $f(0)$; $f(2)$ et $f'(0)$.
 - f) A partir de la question précédente, montrer que les réels a, b et c vérifient le système de la question 1., puis déduire les valeurs de a, b et c .
 - g) En déduire les équations de (D) et (Δ) .

Exercice 9:

Le plan est muni d'un repère orthonormé O, I, J . Le tableau ci-dessous est le tableau de variation d'une fonction f de courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$.

1. a) Déterminer sous forme de réunion d'intervalles l'ensemble de définition de f .



x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-4	$+\infty$	0	$+\infty$	

- b) Préciser les extréma de f .
 - c) Donner les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Préciser les équations des tangentes à (C_f) aux points d'abscisses -2 et 0 .
3. On admet qu'il existe trois réels a , b et c tels que pour tout $x \neq -1$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$
 - a) Déterminer la dérivée f' de f .
 - b) Déterminer les réels a , b et c puis en déduire l'expression de $f(x)$.
 - c) Déduire les asymptotes à (C_f) .
3. Tracer la courbe (C_f) .
4. Discuter suivant les valeurs du paramètre m , l'existence, le nombre et le signe des solutions de l'équation $f(x) = m$.
5. Soit g la fonction définie par $g(x) = |f(x)|$.
 - a) Donner le programme de construction de la courbe (C_g) de g .
 - b) Construire (C_g) dans le même repère que (C_f) .

Ne t'inquiète pas si tu as des difficultés en maths!!!
"Je peux t'assurer que les miennes sont bien plus importantes"
Albert Einstein