Ministère de l'Enseignement Supérieur
Université de Yaoundé I
Classes Scientifiques Spéciales
Proposé par: RAYE Yusuf

Année académique: 202 /202
Session intensive : CSS-MATHS
Epreuve de Mathématiques
Coef: 10

Partie A : Evaluation des ressources

SUJET 1

EXERCICE 1:

1. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 3\cdot 5^{2n-1}+2^{3n-2}$ est divisible par 17. **1pt**
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n-1}(1+\frac{1}{k+1}) \geq 1+\frac{n}{2}$ **1pt**
3. **a)** Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. **1pt**

   b) En déduire la somme : $S_{(m,n)} = mn+(m-1)(n-1)+\cdots+1\cdot(n-m+1)$ où m et n sont des entiers naturels tels que $m < n$. **1pt**

   c) Calculer $S_{(7,10)}$. **1pt**

EXERCICE 2:

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$: a) $x^2-3x+4 \equiv 0[7]$; b) $8x \equiv 7[5]$. **1pt**

2. Déterminer les entiers x et y tels que le nombre qui s'écrit $\overline{x32y}^5$ soit divisible par 3 et par 4. **1pt**

3. a) Dans le système décimal, déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n, le chiffre des unités de 2^n et de 7^n. **1pt**

b) *Application :* Trouver le chiffre des unités de $3548^9 \times 2537^{31}$. **1pt**

4. Démontrer que : si n est impair alors $n^2-1 \equiv 0[8]$ **1pt**

SUJET 2

EXERCICE 1:

Le tableau ci-dessous indique la puissance x en chevaux et la cylindrée y (en cm^3) de huit voiture à moteur Diesel.

Numéro de voiture	1	2	3	4	5	6	7	8
Puissance x	35	55	60	60	65	70	72	75
Cylindre y	1000	1600	1800	1700	1900	2000	2100	2500

1. a) Représenter le nuage de la série (x ; y). (Choisir sur l'axe des abscisses 1cm pour 10 chevaux et sur l'axe des ordonnées 2cm pour 1000 cm^3). **2pts**

b) Le nuage ainsi représenté laisse-t-il entrevoir un ajustement linéaire ? **1pt**

2. Calculer la puissance moyenne et la cylindrée moyenne des huit voitures. **1,5pt**

3. Sachant que la covariance du couple (x ; y) vaut 4662,5 :

a) Écrire une équation cartésienne de la droite de régression de x en y. **1,5pt**

b) Donner une estimation au cheval près de la puissance d'un moteur de cylindrée 3500 cm^3. **1pt**

EXERCICE 2:

Trois pays envoient chacun à une conférence deux espions ; chaque espions doit espionner tous les espions des autres pays (mais pas son propre collègue !)

1. Représenter cette situation par un graphe d'ordre 6. **1pt**
2. Ce graphe est-il complet ? Est-il connexe ? **1pt**
3. Quel est le degré de chaque sommet ? Déduisez-en le nombre d'arêtes. **1pt**

Partie B : Evaluation de Compétences (3,5pts)

En visite dans une grande ville Africaine, Paul, élève en classe de Terminale C a été émerveillé par le nouvel échangeur, le tracé de certaines rues et le système de jet d'eau qui se trouve au rond-point. Le guide de Paul, un féru de mathématiques, lui annonce que le coût de la réalisation c du projet de modernisation de la ville, en francs CFA s'exprime par $c = 5 \times 10^n$ où n est un entier naturel. De plus, c possède 132 diviseurs positifs.

En se promenant, Paul rencontre un artiste qui expose deux types de tableaux T_1 et T_2 dont les nombres respectifs p et q sont tels que $\frac{p+15}{P+2}$ est un entier naturel et q un nombre premier tel que $13q + 1$ est le carré d'un entier naturel

Ces tableaux sont exposés dans un musée où N visiteurs au moins viennent chaque jour et N est tel que $PPCM\ (9N + 4\, ; 2N - 1) = 714$

Tâche 1 : Détermine le coût exact de la réalisation du projet (1.5pt)

Tâche 2 : Détermine le nombre de tableaux de chaque type (1,5pt)

Tâche 3 : Déterminer N (1pt)

TRAVAUX DIRGES DE MATHEMATIQUES

EXERCICE 1:

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n\in N^*$, $\prod_{k=1}^{n}(6k-3)=\left(\frac{3}{2}\right)^n\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)$. **1pt**
2. Démontrez que $\forall a,b\in\mathbb{R}^*, \forall n\in\mathbb{N},\ (a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}$ **1pt**
3. On note, $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ F_n=2^{2^n}+1$.
   a) Montrer que : $2^{2^n}\equiv -1[F_n]$. **0,5pt**
   b) Montrer que : $2^{2^{2^n}}=\left(2^{2^n}\right)^{2^{2^n-n}}$ **0,25pt**
   c) En déduire que F_n divise $2^{F_n}-2$. **0,75pt**

EXERCICE 2:

1. Répondre par « **vrai** » ou « **faux** » aux affirmations **(a)**, **(b)**, **(c)** et **(d)**. **0,5pt×4.**
Soit f la fonction définie par : $f(z)=\frac{z}{z-1+\bar{z}}$.

(a) La fonction f est définie sur $\mathbb{C}\backslash\{0,5\}$.
(c) $f(i)=-i$.
(b) On a : $f\circ f(z)=\dfrac{1}{f(z)}$.
(d) Il existe un unique z tel que $f(z)=z$.

2. On considère le polynôme P de la variable complexe z défini par :
$$P(z)=2z^4-6z^3+9z^2-6z+2.$$
a) Démontrer que si z_0 est racine de P(z), alors $\overline{z_0}$ et $\frac{1}{z_0}$ sont aussi racines de P(z). **1pt**
b) Vérifier que 1+i est racine de P(z). **0,5pt**
c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation P(z)=0. **1pt**

3. Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Soit la transformation qui au point M d'affixe z=x+iy, fait correspondre le point M' d'affixe z'=x'+iy', définie par : z'=$\frac{z-3}{z-2i}$ $(z\neq 2i)$
a) Calculer x' et y' en fonction de x et y. **1pt**
b) Déterminer :
(i) L'ensemble (Γ_1) des points M tels que z' soit réel. **0,5pt**
(ii) L'ensemble (Γ_2) des points M tels que z' soit imaginaire pur. **0,5pt**

EXERCICE 3:

1. Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0\in[0,1]$ et la relation $u_{n+1}=\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$ pour tout entier n.
   a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $0\leq u_n\leq 1$. **1pt**
   b) Montrer que la suite (u_n) est convergente. **1pt**
   c) On pose $u_0=cos\theta$, où $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Montrer que $u_n=cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ **1,5pt**
   d) Etudier la limite de la suite (u_n). **1pt**
2. Pour tout $n\geq 1$, on considère la suite (v_n) définie par : $v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$
   a) Montrer que pour tout $n\geq 1$, $v_{2n}-v_n\geq\sqrt{\frac{n}{2}}$. **1,5pt**
   b) En déduire la limite de la suite (v_n). **1pt**

Enseignements secondaires
e-Learning mathématiques
672 50 50 48

Année Scolaire: 2021/2022
Classe: Tle C
Coef: 07 et Durée: 03H00

TRAVAUX DIRGES DE MATHEMATIQUES

EXERCICE 1:

I- 1. $\forall$a, b et c $\in \mathbb{Z}$, si $PGCD(a;b) = 1$ alors $PGCD(a+b; ab) = 1$. **0,75pt**

2. Résoudre $\mathbb{N}^{*2}$, $2PPCM(x;y)+PGCD(x;y)=111$ **1pt**

II- On admet que :

(i) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, *il existe* $(n,a) \in \mathbb{N}^2$ *tel que :* $p = 2^n(2a+1)$.

(ii) Un nombre entier n ≥ 2 *est dit* ***composé*** *si et seulement s'il n'est pas premier.*

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que : « si $2^k + 1$ est premier, alors k est une puissance de 2. » (q) . **1pt**

2. On pose $F_n = 2^{2^n} + 1$, $(n \in \mathbb{N})$.

a) Vérifier que 641 divise F_5. **0,5pt**

b) F_5 est-il premier ou composé ? **0,5pt**

c) La réciproque de la propriété (q) est-elle vraie ? Justifier. **0,5pt**

d) Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, montrer que : si $m > n$, alors $F_m \equiv 2[F_n]$. **1pt**

e) En déduire que PGCD $(F_m;\ F_n) = 1$. **0,5pt**

III- 1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation : $5x - 3y = 1$. **0,75pt**

2. Déduire les solutions dans $\mathbb{Z}$ du système $\begin{cases} x \equiv 2[3] \\ x \equiv 1[5] \end{cases}$. **0,5pt**

EXERCICE 2:

La formule de Moivre stipule que pour tout θ réel et tout $n \in \mathbb{N}$, $(cos\theta + isin\theta)^n = \cos(n\theta) + isin(n\theta)$.

Soit $z_0 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$. On pose $\alpha = z_0 + z_0^4$, et $\beta = z_0^2 + z_0^3$.

1. Vérifier que $z_0^5 = 1$. **0,25pt**

2. a) Montrer que : $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$. **0,75pt**

b) En déduire que α *et* β sont solution de : $x^2 + x - 1 = 0$. **0,5pt**

3. Déterminer α en fonction de $\cos\frac{2\pi}{5}$. **0,5pt**

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ et en déduire la valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$. **1pt**

EXERCICE 3:

On définit la suite (U_n) sur IN^* par $U_1 = 1$ et $n^2U_n^2 - (n-1)^2 U_{n-1}^2 = n$ pour $n \geq 2$.

1-On définit la suite (V_n) sur IN^* par : $V_n = n^2U_n^2$.

a) Justifier que (V_n) vérifie la relation $V_n - V_{n-1} = n$. **1pt**

b) En déduire des questions précédentes, l'expression de V_n en fonction de n. **1pt**

2-Déduire de la question 1, que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite. **1pt**

Enseignements secondaires
e-Learning mathématiques
672 50 50 48

Année Scolaire: 2021/2022

Classe: Tle C

Coef: 07 et Durée: 03H00

EXERCICE 1:

I- Soit p entier premier ≥ 5, n un élément de $\mathbb{N}$.

1. Montrer que : $\dfrac{(p-1)(2p-1)}{6} \in \mathbb{N}$. **1pt**

2. Montrer que p divise $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}(n-k)^2$. **1pt**

II-Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(a\,;b)$ tels que :

$2a^2 + b^2 = 16072$ et $PGCD(a\,;b) = 14$. **1pt**

III-1- Soit $a\ et\ b$ deux entiers naturels non nuls, montrer que :

si ab est premier, alors $a = 1\ ou\ b = 1$. **0,5pt**

2-Soit $n \in \mathbb{Z}$.

a) Développer et réduire $(n+1)^4$. **0,25pt**

b) Factoriser le polynôme $P(n) = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 5$. **0,75pt**

c)Trouver tous les entiers relatifs n tels que $P(n)$ soit premier. **0,5pt**

EXERCICE 2:

I-On considère le système (S) suivant : $\begin{cases} +y+z = 2i-1 \\ xy+yz+xz = -2(1+i) \\ xyz = 2 \end{cases}$ d'inconnue x, y et z dans $\mathbb{C}$.

1. Soit le polynôme à variable complexe z définie par : $P(z) = z^3 + (1-2i)z^2 - 2(1+i)z - 2$.

Montrer que (a, b, c)$\in\mathbb{C}^3$ est solution de (S) si et seulement si a, b et c sont racine de P. **0,5pt**

2. a) Montrer que l'équation P(z)=0 admet une solution réelle et une seule que l'on déterminera. **1pt**

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation P(z)=0 et en déduire les solutions du système (S) dans $\mathbb{C}^3$. **1pt**

II-L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On donne A(3 ;1 ;0), B(–1 ;1 ;0), C(–1 ;2 ;–1) et I(1 ;0 ;–2).

1. a) Déterminer une équation du plan (P) passant par A, B et C. **0,5pt**

b) Calculer le volume du tétraèdre IABC. **0,5pt**

2. (S) est la sphère de centre I et passant par A.

a) Vérifier que B et C sont situés sur (S) et déterminer le centre H du cercle circonscrit au triangle ABC. **1pt**

b) (Q) est le plan d'équation y+z+2=0. Montrer que (P) est parallèle à (Q). **0,5pt**

Enseignements secondaires
e-Learning mathématiques
672 50 50 48

Année Scolaire: 2021/2022

Classe: Tle C

Coef: 07 et Durée: 03H00

EXERCICE 1:

Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a > b$. On désigne par δ et μ leur pgcd et leur ppcm respectivement.

1. Soit n un entier naturel non nul. On donne : $a = (n+1)(2n+1)$ et $b = n(2n+1)$.

a) Déterminer δ et μ en fonction de n. **0,5pt**

b) Vérifier que $\delta = a - b$ et $\mu(a+b) = ab\delta$. **0,5pt**

2. Réciproquement, soit a et b deux entiers naturels tels que $\delta = a - b$ et $\mu(a+b) = ab\delta$.

a) On note a' et b' les entiers naturels tels que : $a = \delta a'$ et $b = \delta b'$.

Démontrer que : $a' - b' = 1$ et $a' + b' = \delta$. **0,5pt**

b) Déduisez-en que δ est un nombre entier impair. **0,5pt**

EXERCICE 2:

ABCDEFGH est un cube d'arête 1. On considère le repère $R = \left(E, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{EA}\right)$.

1. $R = \left(E, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{EA}\right)$ est-il direct ou indirect ? **0,25pt**

2. a) Montrer que : $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BH}$. **0,5pt**

b) Montrer que la droite (BH) est perpendiculaire au plan (ACF). **0,5pt**

c) Calculer l'aire du triangle ACF. **0,5pt**

3. a) Déterminer dans le repère R les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$. **0,25pt**

b) En déduire le volume du tétraèdre ABCF. **0,5pt**

4. Calculer de deux manières différentes la distance du point B au plan (ACF). **1pt**

EXERCICE 3:

A – On donne le nombre complexe Z=$2cos^2\alpha + isin2\alpha$ où $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

1. Exprimer $sin2\alpha$ en fonction de $cos\alpha$ et $sin\alpha$. **0,5pt**

2. Calculer le module et un argument de Z. **0,5pt**

3. a) Déterminer le module de Z–1. **0,5pt**

b) En déduire que l'ensemble des points M d'affixe Z–1 lorsque $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ est un cercle (C) à caractériser. **0,75pt**

B – Considère dans $\mathbb{C}$ les complexes Z_1 et Z_2 de module 1 et d'arguments respectifs α et β.

1. Montrer que $\frac{(Z_1+Z_2)^2}{Z_1Z_2}$ est un réel positif ou nul. Dans quel cas est-il nul ? **0,75pt**

2. Soit deux points A et B d'un plan complexe d'origine O d'affixes respectives a et b (on suppose O, A et B non alignés). Calculer en fonction de a et b l'affixe Z_I du point I barycentre de $(A, |b|)$ et $(B, |a|)$.

3. a) Montrer que $\frac{(Z_I)^2}{ab}$ est un réel strictement positif. **0,5pt**

b) Exprimer $argZ_I$ en fonction de $\arg(a)$et $arg(b)$et en déduire que $\overrightarrow{OI}$ est un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle des demi-droites des vecteurs directeurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$. **1pt**

Enseignements secondaires
e-Learning mathématiques
672 50 50 48

Année Scolaire: 2021/2022
Classe: Tle C
Coef: 07 et Durée: 03H00

EXERCICE 1:

I- Choisir la bonne réponse.

1. Soit a et n deux nombres entiers naturels $(n \geq 2)$ tels que $a \equiv 1[n]$. Si $2^n \equiv 1[k]$, (pour tout $k \in \mathbb{N}$) alors : **a)** $2^a \equiv 1[k]$; **b)** $2^a \equiv 2[k]$; **c)** $2^a \equiv 2[n]$ **0,5pt**
2. On considère les vingt six lettres de l'alphabet français. A chacune des lettres de A à Z on associe son rang dans l'alphabet (On associe 1 à A, 2 à B, 3 à C etc.…). Ainsi, chacune des vingt six lettres de l'alphabet est associée à un entier x tel que $1 \leq x \leq 26$.
On désigne par f la fonction définie sur l'ensemble {1, 2, …., 26} par « f(x) est le reste de la division euclidienne de 5x+1 par 26 ». On code un message de la manière suivante : si a est le rang de la lettre à coder, alors f(a) est le rang de la lettre qui la remplace. Par exemple, la lettre B de rang 2 est codée par la lettre de rang 11, à savoir la lettre K. On admettra que la lettre E est codée par Z.
Le code du nom TCHEPANOU est : **a)** XWPZRSTBE ; **b)** WPOZCFSXB ; **c)** WPOZDFSXN **0,75pt**

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

3. On considère les points $A(1\,;-2\,;4)$, $B(-2\,;-6\,;5)$, $C(-1\,;0\,;6)$ et $D(-4\,;0\,;-3)$.
   a. La droite (AD) est parallèle au plan (ABC).
   b. La droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
   c. La droite (AD) n'est ni parallèle ni perpendiculaire au plan (ABC). **0,5pt**
4. On considère le plan P d'équation $x + y - 3z + 4 = 0$ et le point $S(1\,;-2\,;0)$. L'intersection de la sphère de centre S et de rayon 3 avec le plan P est :
   a. Un cercle de rayon $\frac{3\sqrt{10}}{11}$ **b.** l'ensemble vide. **c.** Un cercle de rayon $3\sqrt{\frac{10}{11}}$. **0,5pt**

II- On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1. I est le milieu de [CG] et K le point tel que $3\overrightarrow{FK} = \overrightarrow{FE}$.

1. Faire la figure. **0,5pt**

2. Montrer que $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BF}\right)$ est une base orthonormée directe. **0,5pt**

3. a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{BI} \wedge \overrightarrow{BK}$. **0,5pt**
b) En déduire l'aire du triangle BIK. **0,5pt**
c) Déterminer une équation cartésienne du plan (BIK). **0,5pt**

4. a) Justifier que ABIK est un tétraèdre. **0,5pt**
b) Calculer son volume et en déduire la distance du point A au plan (BIK). **0,75pt**

EXERCICE 2:

I- Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(x\,;y)$ tels que : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8884 \\ PPCM(x;y) = 1260 \end{cases}$. **0,75pt**

II-Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}{2x - \sqrt{4x^2 + x}}$ **0,5pt**

III-Soit $z = e^{i\frac{\pi}{n}}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{2}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}}}$. **0,25pt**

2. $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} n \tan\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$. **1pt**

EXERCICE 3:

1. Calculer $\left(1 + i\sqrt{2}\right)^6$. **0,5pt**

2. En déduire dans $\mathbb{C}$ les six solutions de l'équation $z^6 = 23 - 10i\sqrt{2}$. (Les solutions seront données sous forme algébrique) **1pt**

Enseignements secondaires
e-Learning mathématiques
672 50 50 48

Année Scolaire: 2021/2022
Classe: Tle C
Coef: 07 et Durée: 03H00

EXERCICE 1:

I- Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou si elle est fausse en justifiant la réponse, par une démonstration lorsqu'elle vous parait vraie, et par un contre exemple lorsqu'elle vous parait fausse. **1,5pt**

1. Soit a, b, c trois entiers naturels. Si PGCD(a, b)=1 et c divise a, alors c et b sont premiers entre eux.
2. Soit a et b deux entiers naturels non nuls et d=PGCD(a, b). Si d est impaire alors a ou b sont impairs.
3. Soit p un nombre premier. Pour tout entier naturel a, $a^{p-1} \equiv 1[p]$.
4. Pour tout entier naturel x, $x^2 \equiv 1[12] \Leftrightarrow x \equiv 1[12]$ *ou* $x \equiv -1[12]$.

II-L'espace E est muni du repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère la droite Δ passant par le point $A(-3\,;1\,;-3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}=2\vec{\imath}-2\vec{\jmath}-\vec{k}$ et la droiet (D) passant par le point B(3 ;2 ;3) et de vecteur directeur $\vec{v}=\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-2\vec{k}$.

1. a) Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$, puis conclure. **0,25pt**
b) Justifier que les droites Δ et (D) sont orthogonaux et non coplanaires. **0,5pt**
c) Déterminer une équation cartésienne du plan contenant Δ et parallèle à (D). **0,5pt**

2. Soit (S) la sphère de centre $C(-1\,;0\,;-1)$ et de rayon 6, et (P) le plan d'équation cartésienne $2x+y+2z+13=0$.
a) Montrer que (S) et (P) se coupe suivant un cercle de centre A. Déterminer le rayon de ce cercle. **0,5pt**
b) Montrer que la droite (D) est tangente à la sphère (S) au point B. **0,5pt**

3. a) Calculer AB. En déduire que le point C appartient au segment [AB]. **0,5pt**
b) Déterminer alors une droite perpendiculaire aux droites (D) et Δ. **0,25pt**

EXERCICE 2:

Partie A. Soit g la fonction définie sur ℝ par : $g(x)=x\sqrt{x^2+1}-1$.

1-Déterminer la dérivée g' de g et dresser son tableau de variation. **0,75pt**
2-Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in \left]0,7;\,0,8\right[$ tel que $g(\alpha)=0$. **0,5pt**
3-En déduire le signe de g sur ℝ. **0,25pt**

Partie B. On considère la fonction f définie sur ℝ par : $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\sqrt{x^2+1}$. C f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$.(unité graphique :2cm)

1-Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. **0,5pt**
2-Montrer que f est continue et dérivable sur ℝ. **0,5pt**
3- Déterminer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x, on a : $f'(x)=\dfrac{x\cdot g(x)}{\sqrt{x^2+1}}$. **0,5pt**
4-a-En déduire le sens de variation de f. **0,5pt**
b-Dresser le tableau de variation de f. **0,5pt**
5-Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^4-3}{3\alpha}$ où α était solution de l'équation $g(x)=0$. **0,5pt**
En déduire un encadrement de $f(\alpha)$. **0,5pt**
6-Construire C f . **0,5pt**

EXERCICE 1:

I- Dans l'espace muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les points ;
$A(-4\,;6\,;-1)$; $B(1\,;2\,;2)$ et $C(-1\,;4\,;3)$.

1. a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés. **0,5pt**

b) Calculer l'aire du triangle ABC. **0,5pt**

2. Ecrire une équation cartésienne du plan (ABC). **0,75pt**

3. Soit I le milieu de [AC], et D=S_I(B) où S_I désigne la symétrie de centre I.

a) Démontrer que les points A, B, C et D sont coplanaires. **0,5pt**

b) Donner la nature du quadrilatère ABCD et Puis calculer son aire. **1pt**

II. α désigne un réel de l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. Le plan complexe orienté est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2cos^2\alpha - zsin2\alpha + 1 = 0$. **1pt**

On note z_1 et z_2 les solutions de cette équation ; $z_1$désigne la solution dont la partie imaginaire est positive. A et B désignent les points d'affixes respectives z_1 et z_2.

2. Quelle est la nature du triangle OAB ? Justifier votre réponse. **0,75pt**

EXERCICE 2:

I- Dire en justifiant, si chacune des assertions ci-dessous est vraie ou fausse.

1. Pour tous réels p et q, on a : $e^{ip} + e^{iq} = 2cos\left(\frac{p-q}{2}\right)e^{i\frac{p+q}{2}}$ **0,25pt**
2. On a : $\overline{18}^{11} \times \overline{14}^{11} = \overline{23A}^{11}$ **0,25pt**

II- Le plan est muni du repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1. Soit f la fonction définie sur [0 ;1], $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$.

a) Etudier les variations de f sur [0 ;1]. (on étudiera localement la dérivabilité de f en 0^+) **0,75pt**

b) Démontrer que pour tout x de [0 ;1], $f \circ f(x) = x$. **0,5pt**

c) Construire la courbe (Cf). Justifier que l'axe de symétrie de (Cf) est la première bissectrice. **0,75pt**

2. Soit $\lambda\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$; les points $A_\lambda\left(\frac{1}{2}+\lambda;0\right)$; $B_\lambda\left(0;\frac{1}{2}-\lambda\right)$et la droite (D_λ)=$(A_\lambda B_\lambda)$

a) Déterminer une équation de la droite (D_λ) sous la forme $u(\lambda)x + v(\lambda)y + w(\lambda) = 0$ où u, v et w sont dérivables. **0,5pt**

b) Soit la droite (L_λ) d'équation $u'(\lambda)x + v'(\lambda)y + w'(\lambda) = 0$. On note M_λ le point de rencontre de (D_λ) et (L_λ).

Prouver que M_λ est de coordonnées $(x_\lambda; y_\lambda)$ avec : $x_\lambda = \left(\frac{1}{2}+\lambda\right)^2$ et $y_\lambda = \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2$. **1pt**

c) Prouver que lorsque λ décrit $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, le point M_λ décrit la courbe (Cf). **0,5pt**

c) Justifier que (D_λ) est la tangente à (Cf) au point M_λ. **0,5pt**

Enseignements secondaires
e-Learning mathématiques
672 50 50 48

Année Scolaire: 2021/2022
Classe: Tle C
Coef: 07 et Durée: 03H00

NB : *Le candidat fera deux exercices sur les trois proposés*

EXERCICE 1:

I- L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On donne A(3 ;1 ;0), B(−1 ;1 ;0), C(−1 ;2 ;−1) et I(1 ;0 ;−2).

1. a) Déterminer une équation du plan (P) passant par A, B et C. **0,5pt**
   b) Calculer le volume du tétraèdre IABC. **0,25pt**
2. (S) est la sphère de centre I et passant par A.
   Vérifier que B et C sont situés sur (S) et déterminer le centre H du cercle circonscrit au triangle ABC. **0,75pt**

II-1-Soit (U_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = 2U_n + 1 \end{cases}$, pour tout $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, (U_n) est une suite d'entiers naturels. **0,5pt**

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, U_{n+1} et U_n sont premiers entre eux. **0,5pt**

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2^n - 1$. **0,5pt**

2-Montrer que, pour tout entiers naturels n et p, non nuls tels que $n \geq p$, $U_n = U_p(U_{n-p} + 1) + U_{n-p}$. **0,5pt**

3-a) Montrer pour $n \geq p$ l'égalité $p\gcd(U_n, U_p) = p\gcd(U_p, U_{n-p})$. **0,5pt**

b) Soit n et p deux entiers naturels non nuls, montrer que $p\gcd(U_n, U_p) = U_{p\gcd(n,p)}$. **0,5pt**

c) Déterminer le nombre : $p\gcd(U_{2005}, U_{15})$. **0,5pt**

EXERCICE 2:

I- θ est un réel de l'intervalle $]-\pi;\pi[$ et z le nombre complexe défini par : $z = \frac{1}{2}[\sin\theta + i(1 - \cos\theta)]$

1. Déterminer en fonction de θ, le module et un argument de z. **0,5pt**
2. En supposant que θ est un réel de $]0;\pi[$, déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes $z_1 = z - i$ et $z_2 = \frac{z}{z-i}$. **0,75pt**
3. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct ; on considère les points M et N d'affixes respectives $z_M = z - i$ et $z_N = \frac{z}{z-i}$. Déterminer la nature géométrique des ensembles décrits respectivement par les points M et N lorsque θ varie dans l'intervalle $]0;\pi[$. **1pt**

II-1. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 4z + 8 = 0$. Ecrire les solutions sous forme algébrique et sous forme trigonométrique. **1pt**

b) A et B sont les images des solutions, A étant l'image de la solution dont la partie imaginaire est négative, dans le repère orthonormé $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ du plan complexe. Quelle est la nature du triangle OAB ? **0,5pt**

2. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$.

a) Déterminer la nature et les éléments géométriques de l'application f. **0,5pt**

b) Déterminer sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique l'affixe du point A', image de A par f. **0,25pt**

c)En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$. **0,5pt**

EXERCICE 3:

I- QCM. Choisir la bonne réponse. **1pt**

1-Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x-2}{x^2}$, et $I =]0;+\infty[$ un intervalle.

a) $f(I) = \left]-\infty;\dfrac{1}{8}\right]$; b) $f(I) =]-\infty;0]$; c) $f(I) = \left[0;\dfrac{1}{8}\right]$

2-Soit f la fonction bijective de $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ vers $[1;+\infty[$ définie par : $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

a) $\left(f^{-1}\right)'(2) = \cos 2$; b) $\left(f^{-1}\right)'(2) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\left(f^{-1}\right)'(2) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

3-La fonction $x \mapsto \cos 2x - \sin\dfrac{x}{2}$ est périodique de période : a) π ; b) 4π ; c) 5π .

4-L'ensemble de dérivabilité de la fonction $x \mapsto \sqrt{3-|x-1|}$ est : a) $]-2;4[$; b) $]-2;1[\cup]1;4[$; c) $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

II- Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$.

1. Etudier la dérivabilité de f à gauche de 0. **0,5pt**

2. Etudier les variations de f. (On étudiera les branches infinies de f) **1pt**

3. Donner une équation de la droite (T) tangente à la courbe (Cf) au point d'abscisse $\frac{1}{2}$. **0,5pt**

4. Tracer (Cf). Unité : 2cm. **0,75pt**

5. Tracer sur le même graphique la courbe (C') de $-f$. **0,5pt**

6. On pose (Γ)=(Cf)∪(C'). Montrer que M(x ;y)∈(Γ) si et seulement si $x(x^2+y^2)-y^2=0$. **0,75pt**

Enseignements secondaires
e-Learning mathématiques
672 50 50 48

Année Scolaire: 2021/2022
Classe: Tle C
Coef: 07 et Durée: 03H00

EXERCICE 1:

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. **2,5pts**

Proposition 1 : « Pour tout entier naturel n, 3 divise le nombre $2^{2n} - 1$. »
Proposition 2 : « Si un entier relatif x est solution de l'équation $x^2 + x \equiv 0[6]$. »
Proposition 3 : « L'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x; y)$ solutions de l'équation $12x - 5y = 3$ est l'ensemble des couples $(4 + 20k; 9 + 24k)$ où $k \in \mathbb{Z}$ »
Proposition 4 : « Il existe un seul couple $(a; b)$ de nombres entiers naturels, tel que $a < b$ et $PPCM(a, b) - PGCD(a, b) = 1$ »
Proposition 5 : *Deux entiers naturels M et N sont tels que M a pour écriture abc en base 10 et N a pour écriture bca en base 10.*
« Si l'entier M est divisible par 27 alors l'entier M−N est aussi divisible par 27. »

EXERCICE 2:

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. d'unité 4cm. On note B le point d'affixe i et M_1 le point d'affixe $Z_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1 - i)$.

1. Soit M_2 le point d'affixe Z_2, l'image de M_1 par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
Déterminer le module et un argument de Z_2. Montrer que M_2 est un point de la droite (D) d'équation : y=x. **0,75pt**

2. Soit M_3 le point d'affixe Z_3, image de M_2 par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3} + 2$. Déterminer Z_3 et montrer que les points M_1 et M_3 sont situés sur le cercle de centre B et de rayon à préciser. **0,75pt**

3. A tout point M du plan d'affixe z (distinct de B), on associe le point M', d'affixe Z telle que $Z = \frac{1}{i-z}$.
Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que M' appartienne au cercle de centre O et dde rayon 1. **0,5pt**

EXERCICE 3:

Soit F une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que F(0) = 0 et dont la dérivée est donnée par $\frac{1}{x^2+1}$, pour tout x de $\mathbb{R}$. On suppose que cette fonction existe et on ne cherchera pas a donner une expression de F(x).
(C) est la courbe représentative de F dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit G, définie sur $\mathbb{R}$ par G(x) = F(x) + F(−x).
   a) Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer G′(x). **0.5 pt**
   b) Calculer G(0) et en déduire que F est une fonction impaire. **0.5 pt**
2. Soit H définie sur]0;+∞[par $H(x) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$
   a) Montrer que H est dérivable sur]0;+∞[et calculer H′(x). **0.5 pt**
   b) Montrer que, pour tout x élément de]0;+∞[, H(x) = 2F(1). **0.5 pt**
   c) En déduire que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 2F(1)$. **0.5 pt**
   d) Qu'en déduit-on pour la courbe (C) ? **0.25 pt**
3. a) Démontrer que, pour tout x élément de [0; 1], $\frac{1}{2} \leq F'(x) \leq 1$. **0.25 pt**
   En déduire que $\frac{1}{2} \leq F(1) - F(0) \leq 1$, puis une valeur approchée de F(1). **0.5 pt**
   b) Soit T la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ par T(x) = F(tan x) − x. **0.25 pt**
   c) Démontrer que T est une fonction constante sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. En déduire la valeur exacte de F(1). **0.5 pt**
4. a) Dresser le tableau de variation de F sur $\mathbb{R}$. **0.5 pt**
   b) Tracer la courbe (C), ses asymptotes et ses tangentes aux points d'abscisses −1, 0 et 1. Unités graphiques : 2 cm sur (Ox) et 4 cm sur (Oy). On prendra F(1) = 0,78. **0.75 pt**

Enseignements secondaires
e-Learning mathématiques
672 50 50 48

Année Scolaire: 2021/2022

Classe: Tle C

Coef: 07 et Durée: 03H00

NB : **Le candidat fera juste deux exercices sur les trois proposés**

EXERCICE 1:

II-On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par $u_0 = 14$, $u_{n+1} = 5u_n - 6$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4. Quelle conjecture peut-on en émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ? **0,5pt**
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n[4]$. En déduire que pour tout entier naturel k, $u_{2k} \equiv 2[4]$ et $u_{2k+1} \equiv 0[4]$ **0,75pt**
3. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2u_n = 5^{n+2} + 3$. **0,5pt**
   b) En déduire que pour tout entier naturel n, $2u_n \equiv 28[100]$ **0,25pt**
4. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n. **0,5pt**
5. Montrer que pour tout entier naturel n, PGCD$(u_n; u_{n+1}) = 2$. **0,5pt**

II-L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(-2; 1; 3)$, $B(0\,; 2\,; -2)$, $C(2\,; 1\,; 1)$, $D(1\,; 0\,; 2)$ et le plan (P) d'équation $2x - y + 2z + 1 = 0$.

1. a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés, puis en déduire une équation cartésienne du plan (ABC). **0,5pt**

b) Démontrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires. **0,25pt**

c) Calculer l'aire du triangle ABC et le volume du tétraèdre ABCD. **0,5pt**

2. Soit le point G tel que : G=bar$\{(A, 1); (B, -2); (C, 3)\}$.

a) Déterminer l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que : $\left(\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{BM} + 3\overrightarrow{CM}\right) \cdot \overrightarrow{BM} = 0$. **0,25pt**

b) Déterminer l'intersection du plan (P) et de l'ensemble (S). **0,5pt**

EXERCICE 2:

I-Linéariser $\cos^3 x \cdot \sin^2 x$. **1pt**

II-Le plan complexe P est muni du repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. Soient les points A, B et C d'affixes $-1, 4i$ *et* $5 - i$ respectivement. f est l'application de P\ $\{B\}$ vers P\ $\{A\}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{-z+5-i}{z-4i}$.

1. Démontrer que f est bijective et définir f^{-1} la réciproque de f. **0,75pt**
2. Déterminer les points invariants par f. **0,75pt**
3. Démontrer que : $AM' \times BM = 5\sqrt{2}$ et $mes\left(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AM'}}\right) + mes\left(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{BM}}\right) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$ **1pt**
4. Soit $(L) = \left\{M(z)/\ arg(z - 4i) \equiv -\frac{\pi}{3}[\pi]\right\}$
   a) Déterminer et dessiner (L) **0,75pt**
   b) Déterminer et dessiner (L') l'image de (L) par f. **0,75pt**

EXERCICE 3:

Soit f la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{1-x}$.

1. Etudier les variations de f. Tracer (Cf) et en déduire la courbe de $|f|$. **1pt**

2. Pour k∊$\mathbb{R}^*$, donner suivant les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation $\left|x\sqrt{1-x}\right| = k$. **0,5pt**

3. On pose $k = \frac{1}{3\sqrt{3}}$, (E) l'équation $|f(x)| = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

a) Justifier que l'équation (E) admet trois solutions x_1, x_2 et x_3 avec $-\frac{1}{3} < x_1 < 0 < x_2 < \frac{2}{3} < x_3 < 1$. **0,75pt**

b) Pour $i \in \{1; 2; 3\}$, justifier qu'il existe un unique $\theta_i \in]0; \pi[$ tel que $cos\theta_i = \frac{3}{2}\left(x_i - \frac{1}{3}\right)$. **0,5pt**

c) Résoudre dans $]0; \pi[$ l'équation $\cos(3\theta) = \frac{1}{2}$. **0,5pt**

d) Ecrire $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$. **0,5pt**

e) Prouver que pour $x \in \left]-\frac{1}{3}; 1\right[$, en posant $cos\theta = \frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right)$, l'équation (E) est équivalente à l'équation $\cos(3\theta) = \frac{1}{2}$, avec $\theta \in]0; \pi[$. **0,5pt**

f) Exprimer les x_i en fonction des solutions de 3.d). Donner l'arrondi d'ordre 4 de chaque valeur de x_i. **0,75pt**

Enseignements secondaires
e-Learning mathématiques
672 50 50 48

Année Scolaire: 2021/2022
Classe: Tle C
Coef: 07 et Durée: 03H00

EXERCICE 1:

L'espace ξ est muni du repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Soit les points $A(1\,;-1\,;2)$, $B(2\,;0\,;-2)$, $C(-1\,;1\,;3)$ et $D(0\,;-3\,;-1)$.

1. a) Démontrer que les points A, B et C déterminent un seul plan que l'on notera (P). **0,5pt**
b) Déterminer une équation cartésienne de (P). **0,5pt**
2. Justifier que ABCD est un tétraèdre. **0,5pt**
3. Soit s la réflexion de plan (P). Déterminer l'expression analytique de s. **0,5pt**

EXERCICE 2:

On considère la fonction numérique u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = x + \sqrt{x^2+4}$.
1. a) Calculer la dérivée $u'(x)$ de u. **0,5pt**
b) Vérifier que : $u'(x) = \frac{(x)}{(x)-x}$. **0,5pt**
2. En déduire une primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction f dans chaque cas :
a) $f : x \mapsto \frac{\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)^2}{\sqrt{x^2+4}}$; **b)** $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$. **1pt**

EXERCICE 3:

Soit $n \in \mathbb{N}$.
1. Montrer que si 3 *ne divise pas* n, alors n^2+8 est composé. **1pt**
(On rappel qu'un nombre est dit *composé* s'il n'est pas premier)
2. Montrer que si n et n^2+8 sont premiers, alors n^3+4 l'est aussi. **1,5pt**

EXERCICE 4:

Soit $z_0 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$. On pose $\alpha = z_0 + z_0^4$ et $\beta = z_0^2 + z_0^3$.

1-Vérifier que $z_0^5 = 1$. **0,25pt**

2-a) Montrer que : $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$. **0,5pt**

b) En déduire que α *et* β sont solution de : $x^2 + x - 1 = 0$. **0,5pt**

3-Déterminer α en fonction de $\cos\frac{2\pi}{5}$. **0,5pt**

4-Résoudre dans **R**, l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ et en déduire la valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$. **0,75pt**

Enseignements secondaires
e-Learning mathématiques
672 50 50 48

Année Scolaire: 2021/2022

Classe: Tle C

Coef: 07 et Durée: 03H00

Exercice 1 .... **[3.25 points]**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O ;ı,ȷ), on considère l'application f qui au point M de coordonnées (x,y) associe le point M' de coordonnées (x',y') tel que : $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$.

On note z l'affixe de M et z' l'affixe de M'.

1-a) Exprimer z' en fonction de z. **0.5pt**

b) Démontrer que f = r o s où s est la réflexion d'axe (O ; $\vec{i}$) et r une rotation affine à préciser. **0.75pt**

2- Décomposer en deux symétries orthogonales et en déduire que f est une réflexion dont ont précisera l'axe. **0.5pt**

3- On note g l'application qui au point M de coordonnées (x,y) associe le point M" de coordonnées (x",y") tel que : $\begin{cases} x" = y + 1 \\ y" = x + 1 \end{cases}$

a) Exprimer l'affixe z" de M" en fontion de l'affixe z de M. **0.5pt**

b) Motrer que g = t o f où t est une translation que l'on caractérisera. **0.5pt**

c) Montrer que le mileu K du segment [MM"] appartient à une droite fixe lorsque M parcourt le plan. **0.5pt**

Exercice 2 .... **[4.5 points]**

I/ Pour tout entier naturel n non nul, on considère les nombres suivants :

$a_n = 2 \times 10^n - 1$; $b_n = 2 \times 10^n + 1$; $c_n = 4 \times 10^n - 1$.

1) a) Calculer les nombres a_n; b_n et c_n pour tout nombre entier naturel $n \in \{1, 2\}$. **0.75pt**

b) Combien les écritures décimales des nombres b_n et c_n ont-elle de chiffres ? **0.25pt**

c) Montrer que b_n et c_n sont divisibles par 3. **0.5pt**

1) a) Montrer en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 que a_3 est premier. **0.5pt**

b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $a_n \times b_n = c_{2n}$ et en déduire la décomposition en produit des facteurs premiers du nombre a_6. **0.5pt**

c) Montrer que $PGCD(a_n, b_n) = PGCD(a_n, 2)$ puis déduire que $a_n \wedge c_n$=1 . **0.5pt**

II/ Soit $\mathcal{E}$ l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(0, 0, \frac{1}{4})$, $B(0, 0, -\frac{1}{4})$ et $F(0, 5, 0)$.

1) Soit $M(x, y, z)$ un point de $\mathcal{E}$.

a) Calculer les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}$. **0.5pt**

b) Déterminer le point M_o tel que $\overrightarrow{M_oA} \wedge \overrightarrow{M_oB} = \overrightarrow{M_oF}$. **0.5pt**

2) Déterminer l'ensemble (−) des points M de $\mathcal{E}$ tels que $\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{M_oF}\right\|$. **0.5pt**

Exercice 3 .... **[3.5 points]**

On considère $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$ pour $x \neq 0$; $f(0) = 1$ sinon et (C_f) sa représentation graphique.

I/ On considère la fonction la fonction g définie par $g(x) = \ln(x + 1) - \frac{x}{x+1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_g de g. **0.25pt**

2) a) Calculer les limtes de g à droite de -1 et en $+\infty$. **0.5pt**

b) Démontrer que g est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et déterminer sa dérivée g'. **0.5pt**

c) En déduire le signe de $g(x)$. **0.5pt**

II/ Soit $h : x \mapsto \ln(x + 1) - \frac{2x}{x+2}$ une fonction

1) Démontrer que , pour tout nombre réel $]-1, +\infty[$, $h(x) \leq \ln(x + 1) - \frac{x}{x+1}$. **0.5pt**

2) a) Démontrer que, pour tout nombre réel $x \in [0, +\infty[$, $0 \leq h'(x) \leq \dfrac{x^2}{4}$. **0.75pt**

b) En déduire que, pour tout nombre réel $x \in [0, +\infty[$, $0 \leq h(x) \leq \dfrac{x^3}{12}$. **0.5pt**

3) D'après ce qui précède , démontrer que pour tout nombre réel $[0, +\infty[$: $-\dfrac{x^3}{12} + \dfrac{x^2}{x+2} \leq x - \ln(x + 1) \leq \dfrac{x^2}{x+2}$. **0.5pt**

"J'admire l'efficacité du savoir pour ce qu'elle atteste une connivence avec le réel. Ce n'est pas d'agir sur les choses qui importe, mais en le pouvant de montrer qu'on parle leur langage."

EXERCICE 1:

On considère dans ℕ*×ℕ*, l'équation (E) : $50x - 11y = 3$.

1. a. Quelles sont les valeurs possibles du PGCD des couples (x, y) solutions de l'équation E ? **0.25pt**

b. Résoudre l'équation (E). **0,5pt**

2. Soit n un entier naturel non nul, on pose : a = 11n + 3 et b = 13n–1.

a. Montrer que tout diviseur de a et b est un diviseur de 50. **0,25pt**

b. En s'inspirant de la question 1.b., déterminer les valeurs de n pour lesquelles le PGCD de a et b est égal à 50. **0,5pt**

EXERCICE 2:

ABCDEFGH est un cube et I est le centre de la face EFGH. L'espace est muni du repère $(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
Soit s la reflexion de plan (ACE) et s' la réflexion de plan (CFH).

1. Déterminer les expressions analytiques de s et de s'. **1pt**
2. a) Démontrer que les plans (ACE) et (CFH) sont perpendiculaires. **0,5pt**
   b) En déduire l'expression analytique du demi-tour d'axe (CI). **0,5pt**

EXERCICE 3:

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{x})$.

1. Montrer que pour tout réel x, on a : $f(2x) = 2[f(x)]^2 - 1$. **0,5pt**
2. On considère dans ℝ l'équation d'inconnue x suivante (E) : $f(2x) - 6f(x) + 5 = 0$.

a) Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $[f(x)]^2 - 3f(x) + 2 = 0$. **0,5pt**

b) Résoudre dans ℝ l'équation (E). **0,5pt**

EXERCICE 4:

On note h la fonction de la variable réelle x définie dans l'intervalle $]0;+\infty[$ par $h(x) = \frac{x+1}{2x+1} - lnx$;
l la fonction de la variable réelle x définie dans l'intervalle $]0;+\infty[$ par $l(x) = \frac{2lnx}{x^2+x}$; (C) la courbe représentative de l dans un repère orthonormé.

1. a) Déterminer les limites de h à droite de 0 et en +∞. **0,5pt**

b) Calculer la dérivée de h et en déduire le tableau de variation de h. **0,75pt**

2. a) Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution λ dans l'intervalle $I =]1;2[$. **0,5pt**

b) Préciser le signe de $h(x)$ dans l'intervalle $]0;+\infty[$. **0,25pt**

3. a) Déterminer les limites de l à droite de 0 et en +∞. **0,5pt**

b) En déduire les asymptotes de (C). **0,25pt**

c) Calculer la dérivée de l et démontrer que, pour tout x de $]0;+\infty[$, $l'(x)$ a le même signe que $(2x+1)h(x)$. **0,5pt**

4. Dresser le tableau de variation de l dans l'intervalle $]0;+\infty[$. **0,5pt**

5. a) Démontrer que $l(\lambda) = \frac{2}{\lambda(2\lambda+1)}$. **0,25pt**

b) On note A le point de rencontre de (C) avec l'axe des abscisses ; écrire une équation cartésienne de la droite (D), tangente à (C) en A. **0,5pt**

c) Tracer (D) et donner une allure générale de la courbe (C). Unité sur les axes : 1,5 cm. **0,5pt**

Enseignements secondaires
e-Learning mathématiques
672 50 50 48

Année Scolaire: 2021/2022
Classe: Tle C
Coef: 07 et Durée: 03H00

EXERCICE 1: / 7pts

I-Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Unité : 6cm.
On considère la transformation f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' défini par : $z' = ze^{i\frac{5\pi}{6}}$ et on définit une suite de points (M_n) de la manière suivante : M_0 a pour affixe $z_0 = i$ et pour tout entier naturel n,
$M_{n+1} = f(M_n)$. On appelle z_n l'affixe de M_n.

1. a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f. **0,75pt**
b) Placer les points M_0, M_1 et M_2 dans le repère. **0,75pt**
c) Montrer que pour tout entier naturel n, on a l'égalité $z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}$. **0,75pt**
d) Soient deux entier n et p tels que $n \geq p$, montrer que les points M_n et M_p sont confondus si et seulement si $(n-p)$ est un multiple de 12. **0,75pt**
4. On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 'équation (E) : $12x - 5y = 3$
a) Résoudre (E). **1pt**
b) En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que Mn appartient à la demi-droite [Ox). **1pt**

II-Dans cette partie l'espace est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
On considère l'application de l'espace f qui à tout point M(x, y, z) de l'espace associe le point M'(x', y', z') de l'espace tel que : $\begin{cases} 3x' = 2x + y - z - 3 \\ 3y' = x + 2y + z + 3 \\ 3z' = -x + y + 2z - 3 \end{cases}$.

1. Démontrer que l'ensemble des points invariants de f est un plan (P). **0,5pt**
2. Montrer que pour tout point M, le point M' appartient au plan (P). **0,5pt**
3. Justifier que pour tout point M, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe, celle d'un vecteur normal du plan (P). Quelle est donc la nature et les éléments caractéristiques de f ? **1pt**

EXERCICE 2: / 13pts

I- p désigne un nombre complexe dont la partie imaginaire est non nulle.
Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
L'équation $z^2 - 2pz + 1 = 0$ a deux solutions z_1 et z_2 appartenant à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
On considère les points A, B, P, M' et M'' d'affixes respectives 1, -1, p, z_1 et z_2.

1. Démontrer sans calculer z_1 et z_2 que :
a) P est le milieu de [M'M''] ; **0,5pt**
b) OM'×OM''=OA^2=OB^2 ; **0,5pt**
c) la droite (xx') de repère $(O, \vec{u})$ est la bissectrice intérieur de l'angle M'OM''. **0,5pt**
2. Démontrer que les points A, B, M', M'' sont cocycliques. **1pt**
3. a) Calculer $(z_1 - p)^2$ et $(z_2 - p)^2$en fonction de p. **1pt**
b) En déduire que :
- PA×PB=PM'^{2}=PM''^{2}. **0,5pt**
- La droite (M'M'') est la bissectrice extérieur de l'angle $\widehat{APB}$. **0,5pt**

4. Le point P étant donné, donner un programme de construction des points M' et M''. **0,5pt**

II-Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit (C) le cercle trigonométrique, A(1 ;0), A'(-1 ;0). La perpendiculaire au segment [AA'] coupe (C) en M et M', coupe [AA'] en H tel que $\overrightarrow{OH} = x\vec{\imath}$, $H \neq A$, $H \neq A'$.

On pose : $\begin{cases} f(x) = aire\ du\ triangle\ AMM',\ avec -1 < x < 1 \\ f(1) = 0,\ f(-1) = 0 \end{cases}$

1. Etudier la dérivabilité de f en -1^+ et en 1^-. **1pt**
2. Pour quelle valeur de x est ce que le triangle AMM' est d'aire maximal. Dans ce cas, quelle est la nature du triangle AMM' ? **0,5pt**
3. Tracer la courbe de f. **1pt**

III- Soit g la fonction définie par $g(t) = \frac{cos^2 t}{2+sint}$

1. Justifier que g est périodique de période T=2π. **0,25pt**
Démontrer que pour tout réel t, $g(\pi - t) = g(t)$. Conclure. **0,75pt**
2. Vérifier que $g(t) = f(sint)$. **0,5pt**
3. Déterminer $f'([-1;1])$ et en déduire qu'il existe un unique réel α dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $g'(\alpha) = 0$. **1pt**
4. Donner la valeur exacte de $g(\alpha)$. Calculer $g(0),\ g\left(\frac{\pi}{6}\right),\ g\left(\frac{\pi}{4}\right),\ g\left(\frac{\pi}{3}\right)\, et\ g'(0)$. **1pt**
5. Etudier les variations de g sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$. **1pt**
6. Tracer (Cg) sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et continuer sur $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$. **1pt**

Enseignements secondaires
e-Learning mathématiques
672 50 50 48

Année Scolaire: 2021/2022
Classe: Tle C
Coef: 07 et Durée: 03H00

EXERCICE 1: / 6pts

I- L'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Soit (D) la droite de représentation paramétrique :
$\begin{cases} x = -2+\beta \\ y = 2-\beta \\ z = 1-2\beta \end{cases}$, $(\beta \in \mathbb{R})$ et A le point de coordonnées (2 ; 2 ; -1).
Déterminer les coordonnées des images respective O' et A' des points O et A par le demi-tour d'axe (D). **1pt**

II- Soit f la fonction numérique dérivable sur $]-1;1[$ par $f(x) = \frac{1}{2}ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. On note (Cf) sa courbe représentative dans le repère (O, I, J). unité graphique :2cm.
1. Calculer les limites de f en -1 et en 1. Interpréter graphiquement les résultats obtenus. **0,75pt**
2. a) Démontrer que : $\forall x \in]-1;1[$, $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ **0,5pt**
b) Déterminer une équation de la droite (T), tangente à (Cf) au point d'abscisse 0. **0,5pt**
3. Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$.
a) Déterminer le sens de variation de g. **0,5pt**
b) Calculer g(0) et en déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x. **0,5pt**
c) Déterminer la position de (Cf) par rapport à (T). **0,5pt**
4. Construire dans le même repère (Cf) et (T).
5. a) Démontrer que f est une bijection de $]-1;1[$ sur $\mathbb{R}$. **0,5pt**
b) On désigne par f^{-1} la bijection réciproque de f et (C') la courbe de f^{-1} dans le repère (O, I, J). Construire (C'). **0,75pt**
c) Démontrer que : $\forall y \in \mathbb{R},\ f^{-1}(y) = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$ **0,5pt**

EXERCICE 2: / 4pts

Le conseil d'établissement du CONODIC voudrait viabiliser un espace libre de son site en y construisant un espace de loisir et un stade de hand-ball.
L'espace de loisir est délimité par les points images sur le cercle trigonométrique, des solutions sur $\mathbb{C}$ de l'équation : $iz^5 + 1 = 0$, l'unité étant 12 mètres. Pour éviter que l'espace soit submergé de boue, le conseil a décidé de la daller à l'aide du sable et du ciment : le sable est vendu à 600Frs le seau de 15 litres et un seau peut couvrir un espace de 0,5m^2. Un sac de ciment coutant 5 700Frs, peut couvrir 0,00003hectare de surface. Le stade de Volley-ball est délimité par trois bornes dans le plan complexe muni du repère orthonormé (O,$\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$) représentés par les points images solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :
$z^3 + (-24+36i)z^2 - (160+672i)z + 4608 + 1536i = 0$. Une solution évidente z_0 de cette équation vérifie la propriété $\overline{z_0} = z_0$. Le conseil décide de recouvrir cette surface du gazon synthétique, n mètres carrés de gazon synthétique coûte environ 36400Frs où n est le plus petit entier naturel tel que $\overline{5n23}^6$ soit divisible par 7.
Le conseil du collège dispose d'un champ ayant la forme d'un quadrilatère dont les longueurs des côtés en mètre a, b, c et d dans cet ordre forment, les termes consécutifs d'une suite géométrique de raison r strictement supérieur à 1. Il veut sécuriser cet espace en plantant les arbres sur son pourtour de façon à ce qu'il ait un arbre à chaque sommet du quadrilatère et les arbres soient également espacés. Il aimerait aussi que la distance entre deux arbres puisse être exprimée par un nombre entier de mètre. Le conseil ne se souvient plus des dimensions de ce champ, mais il se rappelle que a est entier strictement inférieur à 13 et que r est premier avec a. Un arbre coûte 200Frs.

TACHES
1. Déterminer le budget à prévoir par le conseil du collège pour la construction de l'espace de loisir. **1,5pt**
2. Déterminer le budget à prévoir par le conseil pour la construction du stade de volley-ball. **1pt**
3. En supposant que $10a^2 = d - b$, déterminer le budget à prévoir par le conseil pour planter les arbres autour de ce champ. **1,5pt**

Enseignements secondaires
e-Learning mathématiques
672 50 50 48

Année Scolaire: 2021/2022

Classe: Tle C

Coef: 07 et Durée: 03H00

Exercice 1 : 7 points

A- Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$.

1- *Déterminer l'ensemble de définition D_f de f, puis calculer les limites de f aux bornes de D_f* 1pt

2- *Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation* 1pt

3- *Construire la courbe de f dans un repère orthonormé. On prendra comme unité sur les axes : 3cm* 1pt

4- *Soit a un réel supérieur à 1.*

a) *Calculer à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $A = \int_1^a \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) dx$* 0,75pt

b) *Déterminer en fonction de a, l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = a$* 0,25pt

B- Dans cette partie, m désigne un réel strictement positif.

1- *Montrer que l'on a : $\frac{1}{m+1} \leq \int_m^{m+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{m}$* 0,5pt

2- *Démontrer que $\int_m^{m+1} \frac{dx}{x} = \frac{1}{m} - f(m)$* 0,5pt

3- *En déduire que l'on a : $0 \leq f(m) \leq \frac{1}{m(m+1)}$* 0,25pt

C- Etude la convergence de la suite (u_n) de terme général $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots \ldots + \frac{1}{2n}$

1- *Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout x différent de 0 et -1, on ait : $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$* 0,25pt

2- *Soit n, un entier naturel non nul. On pose $s_n = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots \ldots + \frac{1}{2n(2n+1)}$.*

a) *En utilisant la question précédente, simplifier l'expression de s_n* 0,5pt

b) *Déterminer la limite de la suite (s_n).* 0,25pt

3- a) *Montrer que l'on a : $0 \leq f(n) + f(n+1) + \cdots \ldots + f(2n) \leq s_n$* 0,25pt

b) *En déduire la limite de $A_n = f(n) + f(n+1) + \cdots \ldots + f(2n)$ en $+\infty$* 0,25pt

4- a) *Justifier que $f(n) + f(n+1) + \cdots \ldots + f(2n) = u_n - \ln 2 - \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$* 0,25pt

b) *En déduire u_n est convergente et préciser sa limite* 0,25pt

EXERCICE 2 [4 POINTS]

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. (Unité graphique : 1cm). On note A, B et C les points d'affixes respectives $2i, -1+4i$ et $5+2i$. On considère la translation t de vecteur $\overrightarrow{BC}$, la symétrie S d'axe (AB) et la transformation $f = toS$. On désigne par A' et B' les images respectives de A et B par f.

1- *Calculer les affixes de A' et B', puis placer les points A, B, C, A' et B' dans le repère* 0,75pt

2- *On rappelle que l'écriture complexe d'un antidéplacement est de la forme $z' = a\bar{z} + b$ où $a, b \in \mathbb{C}$ et $|a| = 1$. A tout point $M(z)$, f associe le point $M'(z')$.*

a) *Justifier que f est un antidéplacement* 0,25pt *b) Démontrer que* $z' = \frac{-3-4i}{5}\bar{z} + \frac{38-6i}{5}$ *0,5pt*

c) Déterminer l'ensemble des points invariants par f *0,5pt*

d) La transformation f *est-elle une symétrie orthogonale ?* *0,5pt*

3- *Soit le point* $D(3+6i)$, (Δ) *la médiatrice de* $[BD]$ *et* S' *la symétrie d'axe* (Δ).

a) Montrer que les droites (Δ) et (AB) *sont parallèles ; puis déterminer* SoS' *0,75pt*

b) Montrer que foS' *est une translation notée* t' *de vecteur* $\overrightarrow{DC}$ *; et en déduire l'expression de* f *en fonction de* t' et S'. *0,75pt*

Exercice 3 (2.5 points)

1. Soient n et m deux entiers naturels non nuls et premiers entre eux. Montrer que $n+m$ et nm sont premiers entre eux. [0.75 pt]
2. Soient a et b deux entiers naturels non nuls. On note $\delta = PGCD(a;b)$ et on pose $a = \delta n$ et $b = \delta m$, où n et m sont des entiers naturels non nuls.
   (a) Justifier l'existence de n et de m puis montrer qu'ils sont premiers entre eux. [0.5 pt]
   (b) Exprimer $PPCM(a;b)$ et $a+b$ en fonction de n, m et δ puis démontrer que : $PGCD(PPCM(a;b); a+b) = PGCD(a;b)$. [0.75 pt]
3. (***Application***)
   Lors d'un chalenge dans un lycée, une partie de jeu aux questions réponses oppose une classe de Terminale C à une classe de Première C. Les deux classes comptes au total 57 élèves, les élèves de la Première étant plus nombreux que ceux de la Terminale. La classe qui remportera la partie recevra des paquets à partager équitablement entre ses membres. Pour qu'un tel partage soit possible quelque soit la classe gagnante, il a fallut prévoir au minimum 252 paquets.
   Combien d'élèves compte chaque classe ? [1 pt]

EXERCICE 1:

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère :
Le plan (P) d'équation cartésienne $x + y + z - 3 = 0$;
La droite (D) passant par le point A(1 ;2 ;3) et de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$;
La symétrie orthogonale s par rapport au plan (P).

1. Démontrer que (D) et (P) sont perpendiculaires. **0,25pt**

2. a) On note M(x, y, z) un point quelconque de l'espace et M'(x', y', z') son image par s. Ecrire x', y' et z' en fonction de x, y et z. **1pt**

b) On note A'=s(A), déterminer les cordonnées de A' dans le repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. **0,5pt**

c) En déduire les coordonnées du point H, intersection de (P) et (D). **0,5pt**

d) Retrouver les coordonnées de H par une autre méthode. **0,5pt**

3. a) Déterminer par son équation cartésienne l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que $\frac{MA}{MH} = \sqrt{5}$. **0,5pt**

b) Reconnaître (S) et déterminer ses éléments caractéristiques. **0,75pt**

c) Préciser l'intersection de (S) et (P). **0,5pt**

EXERCICE 2:

On note :
h la fonction de la variable réelle x définie dans l'intervalle $]0;+\infty[$ par $h(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x$;
l la fonction de la variable réelle x définie dans l'intervalle $]0;+\infty[$ par $l(x) = \frac{2\ln x}{x^2+x}$; (C) la courbe représentative de l dans un repère orthonormé.

1. a) Déterminer les limites de h à droite de 0 et en $+\infty$. **0,5pt**

b) Calculer la dérivée de h et en déduire le tableau de variation de h. **0,75pt**

2. a) Démontrer que l'équation h(x)=0 admet une unique solution λ dans l'intervalle $I =]1,2[$. **0,5pt**

b) Préciser le signe de h(x) dans l'intervalle $]0;+\infty[$. **0,25pt**

3. a) Déterminer les limites de l à droite de 0 et en $+\infty$. **0,5pt**

b) En déduire les asymptotes de (C). **0,5pt**

c) Calculer la dérivée de l et démontrer que, pour tout x de $]0;+\infty[$, $l'(x)$ a le même signe que (2x+1)h(x). **0,5pt**

4. Dresser le tableau de variation de l dans l'intervalle $]0;+\infty[$. **0,5pt**

5. a) Démontrer que $l(\lambda) = \frac{2}{\lambda(2\lambda+1)}$. **0,5pt**

b) On note A le point de rencontre de (C) avec l'axe des abscisses ; écrire une équation cartésienne de la droite (D), tangente à (C) en A. **0,5pt**

c) Tracer (D) et donner une allure générale de la courbe (C).
Unité sur les axes : 1,5 cm. **0,5pt**

Enseignements secondaires
e-Learning mathématiques
672 50 50 48

Année Scolaire: 2021/2022
Classe: Tle C
Coef: 07 et Durée: 03H00

EXERCICE 1:

I- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_1) : $z^2 - 2z\cos\alpha + 1 = 0$ où α est un paramètre réel **0,5pt**

2) Donner la formule trigonométrique des solutions de l'équation (E_n) : $z^{2n} - 2z^n\cos\alpha + 1 = 0$ où $n \in \mathbb{N}^*$ 0,5pt

II- Soit $P_\alpha(z) = z^{2n} - 2z^n\cos\alpha + 1$

1) Montrer que $P_\alpha(z) = \prod_{k=0}^{n-1}\left[z^2 - 2\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right]$ **0,5pt**

2) a- Calculer $P_\alpha(1)$ **0,25pt**

b- En déduire que $\prod_{k=0}^{n-1}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}$ **0,5pt**

3) pour tout $\alpha \in]0;\pi[$ et pour tout entier naturel n ≥ 2, on pose : $H_n(\alpha) = \prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$

a- Montrer que $2^{n-1}H_n(\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}$ **0,5pt**

b- Quelle est la limite de $H_n(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 ? **0,25pt**

III-On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \left(\frac{3}{2}u_n\right)^2 \end{cases}$ et $v_n = \ln\left(\frac{3}{2}u_n\right)$

1- Calculer v_0 **0,25pt**

2- Démontrer que (v_n) est une suite géométrique **0,25pt**

3- Exprimer v_n puis u_n en fonction de n **0,5pt**

4- Calculer la limite de v_n puis en déduire celle de u_n **0,25pt**

5- Pour tout entier naturel n , on pose : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$ et $T_n = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$

a- Démontrer que : $S_n = (1 - 2^n)\ln 2$ **0,25pt**

b- Justifier que : $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$ **0,25pt**

6 - Exprimer T_n en fonction de n. **0,25pt**

EXERCICE 2:

Les buts du problème sont l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :
$f(x) = \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$, puis la recherche de primitives de cette fonction.

Partie A : Etude de fonctions auxiliaires

I. On définit la fonction g sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par : $g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1)$.

1. Etudier les variations de g. **0,5pt**
2. Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique, notée α, tel que $e + 1 < \alpha < e^3 + 1$. **0.25pt**
3. En déduire suivant les valeurs de x le signe de g(x). **0.25pt**

II. Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par : $\varphi(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x}$.

1. Calculer les limites de φ aux bornes de son domaine de définition. **0.25pt**
2. Calculer $\varphi'(x)$ et montrer que $\varphi'(x) = \frac{g(x^2)}{x^2(x^2-1)}$. **0.25pt**
3. En déduire les signes de $\varphi'(x)$ et de $\varphi'(e^x)$ suivant les valeurs de x. **0.5pt**

Partie B : Etude de la fonction f.

1. Vérifier que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = \varphi(e^x)$ et montrer que $f'(x) = e^x\varphi'(e^x)$. **0.25pt**
2. En déduire :

a) La limite de f(x) lorsque x tend vers 0. **0.25pt**

b) La limite de f lorsque x tend vers +∞. **0.25pt**

c) Le sens de variation de f sur]0; +∞[et que f admet un maximum en $ln(\sqrt{\alpha})$. **0.25pt**

3. Montrer que $\varphi(\sqrt{\alpha}) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$ et déduire de ce qui précède que ∀x > 0, on a : $f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$. **0.5pt**

4. Soit h la restriction de f sur $[ln\sqrt{\alpha};\ +\infty[$. Montrer que h admet une réciproque h^{-1} dont on donnera le domaine de définition et le domaine de dérivabilité. **0.25pt**

5. Représenter graphiquement f et h^{-1} dans repère un repère orthogonal d'unités 5cm en abscisse et 10cm en ordonnée. On prendra α= 10. **0,5pt**

Partie C : Recherche de primitives de f.

1. Vérifier que pour tout réel x > 0, on a $f'(x) + f(x) = \frac{e^x}{e^x-1} - \frac{e^x}{e^x+1}$. **0.25pt**

2. On pose $u(x) = \frac{e^x}{e^x-1} - \frac{e^x}{e^x+1}$

a) Trouver une primitive U de u sur l'intervalle]0; +∞[. **0.25pt**

b) En déduire les primitives F de f sur l'intervalle]0; +∞[. **0.25pt**

Enseignements secondaires
e-Learning mathématiques
672 50 50 48

Année Scolaire: 2021/2022
Classe: Tle C
Coef: 07 et Durée: 03H00

EXERCICE 1:

I- On donne l'équation (E) : $5x - y = -3$

1. Résoudre (E). **0,5pt**

2. Soit les suites (x_n) et (y_n) définies sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = 4x_n + 2 \end{cases}$ et $\begin{cases} y_0 = 8 \\ y_{n+1} = 4y_n + 1 \end{cases}$

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, le couple (x_n, y_n) est solution de (E). **0,5pt**

b) En déduire que si x_n *et* y_n ne sont pas divisibles par 3, alors ils sont premiers entre eux. **0,5pt**

3. On pose $u_n = x_n + a$ et $v_n = y_n + b$ où a *et* b sont des nombres réels.

a) Trouver les valeurs de a *et* b pour que les suites (u_n) et (v_n) soient géométriques. **0,5pt**

b) Déduire x_n *et* y_n en fonction de n ; puis étudier la convergence de chacune de ces suites. **0,5pt**

II- Dans le plan est muni du repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère l'ensemble (E) des points $M(x, y)$ du plan vérifiant la relation $(x-2)^2 + (y-2)^2 = \left(\frac{x+y-8}{2}\right)^2$ *(1)*

Soit f la transformation du plan d'expression analytique : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x+y) \\ y' = \frac{1}{2}(-x+y) \end{cases}$.

1. Déterminer l'écriture complexe de f. **0,25pt**

2. Donner la nature et les éléments caractéristiques de f. **0,5pt**

3. En considérant le point G(2, 2) et la droite (D) d'équation $x + y - 8 = 0$, interpréter géométriquement les deux membres de la relation *(1)*, et en déduire que (E) est une conique dont on déterminera la nature, un foyer et une directrice. **0,75pt**

4. a) Montrer que l'image (E') de (E) par f a pour équation $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$. **0,5pt**

b) Construire (E') puis (E). (Unité=1cm) **0,5pt**

EXERCICE 2:

I- On pose $I_{p,q} = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt, \quad p, q \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $I_{p,q} = I_{q,p}$ **0,25pt**

2. Calculer $I_{2,13}$ puis $I_{p,0}$, $\forall p \in \mathbb{N}$. **0,5pt**

II- Soit f la fonction définie par : $f(x) = x + 2 - ln(1 + e^x)$. (C) est sa courbe représsentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Unité :1cm.

A)Etude de la fonction f.

1. Montrer que pour tout x réel , $f(x) = 2 - ln(1 + e^{-x})$ et calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f. **0,5pt**

2. Montrer que la droite (d) d'équation y=x+2 est une asymptote à (C) puis étudier la position de (C) par rapport à (d). **0,5pt**

3. Montrer que l'équation f(x)=0 admet une solution réelle unique a et donner sa valeur exacte. **0,5pt**

4. Construire (C), (d) dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. **0,75pt**

B)Etude d'une fonction intégrale.

Soit F la fonction définie sur $[a; +\infty[$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

1. Montrer que $F(x) \geq 0$ pour tout réel $x \geq a$. **0,25pt**

2. Donner le sens de variation de f. **0,25pt**

3. a) Montrer que pour tout réel $u \geq 0$ on a $1 - u \leq \frac{1}{1+u} \leq 1$. **0,5pt**

b) Déduire que pou tout réel $t \geq 0$, on a : $t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$ et que $f(x) \geq 2 - \frac{1}{e^x}$ pour tout réel x. **0,5pt**

4. a) Montrer que $F(x) \geq 2x - \frac{1}{e^a}$ pour tout réel $x \geq a$. **0,25pt**

b) En déduire la limite de F(x) quand x → $+\infty$. **0,25pt**

Enseignements secondaires
e-Learning mathématiques
672 50 50 48

Année Scolaire: 2021/2022

Classe: Tle C

Coef: 07 et Durée: 03H00

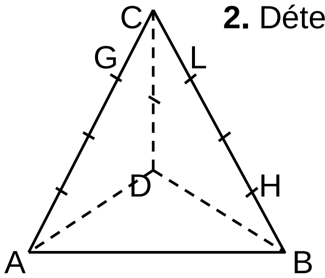
Partie A : Evaluations des ressources

EXERCICE 1:

I-Sur la figure ci-dessus, CABD est un tétraèdre régulier (toutes ses face sont des triangles équilatéraux) ; G et H sont des points tels que : $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{CH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$ et L est le milieu du segment [CD].

1. Montrer que les droites (GH) et (AB) sont sécantes en un point qu'on appellera I. **0,5pt**

$\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ *et* $\vec{k}$ sont des vecteurs unitaires, respectivement colinéaires et de même sens que les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ *et* $\overrightarrow{AC}$. On suppose que l'espace est rapporté au repère $(A; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et que AC=4.



2. Déterminer les coordonnées des points G, H et I, dans le repère $(A; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. **1,25pt**

3. Doit E l'espace vectoriel associé à l'espace affine ci-dessus ; $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base de E. f est l'endomorphisme de E tel que

$f(\vec{\imath}) = \vec{\jmath}, f(\vec{\jmath}) = \overrightarrow{-2\jmath}$ *et* $f(\vec{k}) = \vec{k}$.

a) Justifier que f n'est pas un automorphisme de E. **0,25pt**

b) Déterminer le noyau et l'image de f ; on donnera une base pour chacun d'eux. **1,5pt**

II- Dans le plan orienté et muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les vecteurs

$\vec{e_1} = \frac{1}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}$; $\vec{e_2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath} + \frac{1}{2}\vec{\jmath}$.

1. Démontrer que $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ est un repère orthonormé du plan. **0,5pt**

2. Déterminer les éléments caractéristiques de la rotation qui transforme $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ en $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. **0,5pt**

3. Une conique dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ a pour équation cartésienne

$13X^2 + 7Y^2 + 6\sqrt{3}XY = 16$.

a) Ecrire l'équation cartésienne réduite de cette conique dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. **1pt**

b) En déduire sa nature et son excentricité. **0,5pt**

EXERCICE 2:

I-1. a) Résoudre dans ℤ×ℤ, l'équation (E) : $13x - 84y = 7$. **1pt**

b) Montrer que pour tout couple solution (a ;b) de (E), on a :

pgcd(a ;b)=1 ou pgcd(a ;b)=7. **0,75pt**

2. Déterminer les solutions (a ;b) de (E) telles que a et b soient premiers entre eux. **0,5pt**

3. Déterminer les solutions (a ;b) de (E) telles que : pgcd(a ;b)=7. **0,75pt**

II- Le repère (O, I, J) est orthonormé. Soit la fonction $f: x \mapsto 1 - x + \sqrt{x^2 + 3}$ et (C) sa courbe représentative.

1. a) Etudier f et tracer (C). **1pt**

b) En déduire que f admet une fonction réciproque dont on précisera l'ensemble de définition D. **0,5pt**

2. a) Tracer sur le même graphique que (C), la courbe représentative de f^{-1}. **0,5pt**

b) Démontrer que : $\forall\, x \in D$, $f^{-1}(x) = \frac{3-(x-1)^2}{2(x-1)}$. **0,5pt**

3. a) Calculer : $\int_2^{1+\sqrt{3}} f^{-1}(x)dx$. **0,5pt**

b) En déduire $\int_0^1 f(x)dx$, puis $\int_0^1 \sqrt{x^2+3}dx$. **0,5pt**

EXERCICE 3:

Soit f la fonction définie sur l'intervalle]0 ;+∞[par : $f(x) = \int_1^x \frac{lnt}{1+t^2} dt$

On désigne par (Γ) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (0, I , J).

1. a) Justifier que f est dérivable sur]0 ; +∞[et calculer $f'(x)$. **0,5pt**

b) En déduire le sens de variation de f. **0,25pt**

2. a) Pour $x > 0$, Calculer $\int_1^x \frac{lnt}{t^2} dt$ à l'aide d'une intégration par parties. **0,5pt**

b) Démontrer que pour tout t ≥ 1, $\frac{lnt}{2t^2} \leq \frac{lnt}{1+t^2} \leq \frac{lnt}{t^2}$. **0,5pt**

c) En déduire que pour tout $x > 0$, $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{lnx}{x}\right) \leq f(x) \leq \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{lnx}{x}\right)$. **0,25pt**

d) On admet que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$, donner un encadrement de l. **0,25pt**

3. Soit g la fonction définie sur]0 ; +∞[par $g(x) = f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right)$.

a) Démontrer que g est la fonction nulle sur]0 ;+∞[**0,75pt**

b) En déduire la limite de f en zéro. **0,5pt**

c) Tracer l'allure de la courbe (Γ). **0,5pt**

Partie B : Evaluations des compétences

Situation:

Lors d'un match du CHAN 2021 au stade omnisport de Yaoundé, un groupe d'encadreurs de l'académie nationale de football et leurs apprenants dont on en dénombre entre 500 et 1000 décident de se rendre au stade pour regarder le match. Les encadreurs ont dépensé 59.000 frs pour l'achats des tickets. Ils ont acheté au moins 26 tickets de 2.000 frs et des tickets 5.000 frs.

Les apprenants ont droit à l'accès gratuit au stade. Ils ont à leur disposition les véhicules du centre pour leur transport pour le stade. Dans le parking du centre, il y a 3 voitures. Lorsqu'ils prennent la première voiture de 18 places, 9 personnes restent. Lorsqu'ils prennent la deuxième voiture qui a 20 places, 9 personnes restent. Finalement ils prennent la troisième voiture qui a 24 places, pour les navettes et 9 personnes restent.

Pour des raisons de sécurité, l'entrée des gradins du stade s'ouvre lorsque les trois signaux lumineux de couleur verte, rouge et jaunes placés à l'entrée sont émis simultanément. Le signal vert émet toutes les 12 secondes, le rouge toutes les 27 secondes et le jaune toutes les 34 secondes. Le dernier groupe d'apprenants arrive à 19h48s instant où l'entrée vient de se refermer.

Tâches :

1. Combien de tickets de 2.000 frs et ceux de 5.000 frs ont-ils achetés ? **1,5pt**

2. Combien d'apprenants se sont rendus au stade ? **1,5pt**

3. Ceux du dernier groupe pourront-ils voir le coup d'envoi du match qui débute à 20h00 ? **1pt**

Enseignements secondaires
e-Learning mathématiques
672 50 50 48

Année Scolaire: 2021/2022
Classe: Tle C
Coef: 07 et Durée: 03H00

EXERCICE 1: **/ 5points**

I- Soit f une fonction numérique continue sur [0 ;1] et telle que pour tout réel x de [0 ;1] ;
$\int_x^1 f(t)dt \geq \frac{1-x^2}{2}$. Soit F une primitive de f sur [0 ;1].

1. a) En intégrant par parties l'intégrale $I = \int_0^1 xf(x)dx$, montrer que :
$F(1) = \int_0^1 xf(x)dx + \int_0^1 F(x)dx.$ **0,5pt**

b) En déduire que $\int_0^1 xf(x)dx \geq \frac{1}{3}$. **0,5pt**

2. a) Développer et réduire $(f(x)-x)^2$. **0,5pt**

b) Déduire que $\int_0^1 [f(x)]^2 dx \geq \frac{1}{3}$. **0,5pt**

II- Soit *f* la fonction définie sur $]0;\pi[$ par : $f(x) = \frac{1}{sinx}$.

1. Etudier la fonction *f* et construire sa courbe représentative (*C*) dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. **0,75pt**

2. Montrer que la restriction *g* de *f* à l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ possède une fonction réciproque g^{-1} dans le même repère que (*C*). **0,5pt**

3. Soit $y = g^{-1}(x)$.
Montrer que $sin\,y = \frac{1}{x}$ et que $cos\,y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$. **0,5 pt**

4. En déduire que pour tout *x* de]1;+∞[, $(g^{-1})'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$. **0,5pt**

5. En se servant des résultats précédents, calculer $I = \int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$. **0,75pt**

EXERCICE 2: **/ 5points**

Soit l'équation différentielle (*E*) : $y'' + (2ln2)y' + (ln2)^2 y = 0$.

1. a) Résoudre l'équation (*E*) dans ℝ. **0,5pt**

b) Déterminer la solution *g* de (*E*) vérifiant : *g* (0) = 0 et *g'*(0) = 1. **0,25pt**

2. On considère la fonction numérique *u* définie pour tout réel *x* par $u(x) = \frac{x}{2^x}$. On note (*C*) la courbe représentative de *u* dans un repère orthonormé du plan.

a) Montrer que la fonction dérivée u' est définie sur ℝ par $u'(x) = (1 - xln2)e^{-xln2}$. **0,5pt**

b) Dresser le tableau de variation de *u*. **0,5pt**

c) Préciser les branches infinies de (*C*). **0,25pt**

d) Tracer (*C*) et sa tangente (T_0) au point d'abscisse 0.
(Prendre 2cm comme unité sur les axes des coordonnées). **1pt**

3. a) Prouver que *u* est une solution particulière de l'équation différentielle (*E*). **0,25pt**

b) En déduire la valeur du nombre réel $(ln2)^2 \times \int_0^1 u(x)dx$. **0,5pt**

4. On définit la suite numérique (V_n) par : $\begin{cases} V_0 = 1 \\ V_{n+1} = \frac{1}{2}(V_n + 2^{-n}),\ pour\ tout\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel *n*, $V_n = u(n)$. **0,5pt**

b) Pour tout entier naturel *n*, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} V_k$.
Démontrer par récurrence que $S_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\right) - \frac{n+1}{n}$ pour tout entier naturel *n*. **0,5pt**

c) Calculer la limite de la suite S_n. **0,25pt**

Enseignements secondaires
e-Learning mathématiques
672 50 50 48

Année Scolaire: 2021/2022

Classe: Tle C

Coef: 07 et Durée: 03H00

Partie A : Evaluation des ressources **EXERCICE 1: /7pts**

I-1-Soit (U_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = 2U_n + 1 \end{cases}$, pour tout $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, (U_n) est une suite d'entiers naturels. **0,5pt**

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, U_{n+1} et U_n sont premiers entre eux. **0,5pt**

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2^n - 1$. **0,5pt**

2-Montrer que, pour tout entiers naturels n et p, non nuls tels que $n \geq p$,

$U_n = U_p\left(U_{n-p} + 1\right) + U_{n-p}$. **0,5pt**

3-a) Montrer pour $n \geq p$ l'égalité $p\gcd\left(U_n, U_p\right) = p\gcd\left(U_p, U_{n-p}\right)$. **0,5pt**

b) Soit n et p deux entiers naturels non nuls, montrer que $p\gcd\left(U_n, U_p\right) = U_{p\gcd(n,p)}$. **1pt**

c) Déterminer le nombre : $p\gcd\left(U_{2005}, U_{15}\right)$. **0,5pt**

II-Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_1^e (\ln t)^n \, dt$.

1-Calculer I_1. **0,5pt**

2-Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}. **1pt**

3-En déduire I_2 et I_3. **0,5pt**

4-Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in N^*$, $I_n = e\left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!}\right] + (-1)^n n!(e-1)$. **1pt**

EXERCICE 2: /8pts

I-Soit ξ un espace usuel rapporté au repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On considère l'application g de ξ qui, à tout point M'(x', y', z') tel que : x'=-x+2 ; y'=z+1 ; z'=y+1.

1-Définir analytiquement l'homothétie h de centre A(1, 0, 0) et de rapport 2, puis montrer que l'application $f = h \circ g$ admet un point invariant B que l'on déterminera. **1,5pt**

2-Définir l'homothétie de centre (1, -2, -2) et de rapport $\frac{1}{2}$ et montrer que $r = h' \circ f$ est un demi-tour d'axe une droite (D) à déterminer. **1pt**

II- On considère deux fonctions f *et* g telles que : $f(x) = x - 1 + \ln(3 - x)$ et $y = g(x)$.

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau des variations. **1,5pt**
2. Etudier la position de la courbe C_f de f par rapport à la droite (D) :$y = x - 1$. **0,5pt**
3. Construire C_f et (D). **1pt**
4. Calculer l'aire en cm^2 du domaine plan délimité par C_f, l'axe des ordonnées et la droite (D).(unité sur les axes 2cm.) **1pt**
5. Soit S la similitude directe pane dont la forme complexe est $Z' = (-1 + i)Z + 1 + 4i$.
   a) Préciser les éléments caractéristiques de S. **0,75pt**
   b) Déterminer explicitement $g(x)$, sachant que la courbe C_g de g est l'image de C_f par la similitude S. **0,75pt**

Partie B : Evaluation des compétences

Situation :

TCHINDA, étudiant, effectue un stage dans une entreprise qui produit trois types d'huiles végétales. L'huile de type A est prête toutes les 1h 15 min, l'huile de type B toutes les 25 min et l'huile de type C toutes les 45 min. Le dernier jour de son stage, les trois types d'huiles étaient prêts à 8 heures et TCHINDA veut savoir à quelles heures de la journée ces trois types d'huiles seront prêts à la fois pour la dernière fois pour arrêter son stage, sachant que l'entreprise ferme à 18 heures. Après la fermeture de l'entreprise, TCHINDA se rend à un spectacle. Le magicien demande aux spectateurs d'effectuer le programme de calcul suivant : «Prenez le nombre représentant le jour de votre naissance et multipliez – le par 12. Prenez le nombre représentant le mois de votre naissance et multipliez – le par 37. Ajoutez les deux nombres obtenus. Je pourrai alors vous donner votre date d'anniversaire ».TCHINDA annonce 308 et quelques secondes après, le magicien déclare : « Votre anniversaire tombe le 1er Août ».

Tâche 1 : A quelles heures TCHINDA doit – il arrêter son stage ? **1,5pt**

Tâche 2: Le magicien a – t – il raison ? **1,5pt**

Tâche3 : Quelle est la date d'anniversaire de Sandra qui a annoncé 474 ? **1,5pt**

Présentation : 0,5pt

Enseignements secondaires
e-Learning mathématiques
672 50 50 48

Année Scolaire: 2021/2022

Classe: Tle C

Coef: 07 et Durée: 03H00

Exercice 1 .... **[2 points]**

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

Soit r un nombre réel strictement positif, $u = re^{-\frac{3\pi}{4}i}$ un nombre complexe.

1) On considère la suite (A_n) définie par : $A_0 = O$; A_1 est d'affixe i; $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, A_n est l'image de A_{n-2} par la similitude directe de centre A_{n-1}, de rapport r et d'angle $-\frac{3\pi}{4}$. On désigne par z_n l'affixe de A_n.

a) Ecrire, ppour tout entier naturel $n > 1$, une relation entre z_n, z_{n-1} et z_{n-2}. *0,5 pt*

b) Montrer par récurrence sur n que pour tout entier naturel $n > 1$, on a $z_n - z_{n-1} = (-u)^{n-1}i$. *0.5 pt*

2a) Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe s, qui transforme A_0 en A_1, et A_1 en A_2.*0,75 pt*

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = s(A_n)$ *0,5 pt*

Exercice 2 .... **[2 points]**

1) Montrer que si deux entiers naturels a et b sont premiers entre eux, alors les entiers a+b et ab sont premiers entre eux.0.5pt

2) On suppose que $p\gcd(a+b, ab) = p^2$, où p est un entier premier.

a) Montrer que p^2 divise a^2. (On remarquera que $a^2 = a(a+b) - ab).0.5pt$

b) Montrer que le $p\gcd(a, b)$ est soit p, soit $p^2.0.5pt$

c) Déterminer deux entiers naturels a et b tels que $p\gcd(a+b, ab) = 49$ et $p\gcd(a, b) = 231$. 0.5 pt

Exercice 3 .... **[2.5 points]**

On considère On cosidère les intégrales : $\mathrm{I}_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx$, $\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x} dx$, n$\in \mathbb{N}^*$

1-a) Calcuuler l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n cox dx$. (0,5 pt)

b) En déduire $\mathrm{I}_{n+2} - I_n$ en fonction de n. (0,5 pt)

2- Calculer I_1. En déduire I_3 et I_5. (0,5 pt)

3- a) soit h l'appication qui à $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$ associe $h(x) = ln[tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})]$

Montrer que h est une primitive de la fonction g définie sur $[0, \frac{\pi}{3}]$ par $g(x) = \frac{1}{\cos x}$. (0,5 pt)

b) En déduire I_0 , I_2 et I_4. (0,75 pt)

Exercice 4 .... **[2 points]**

Soit E un espace vectoriel de dimension trois , rapporté à une base ($\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$) et soit f l'endomorphisme de E défini par : f($\overrightarrow{i}$) = f($\overrightarrow{j}$) = f($\overrightarrow{k}$) = $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$

1- a) Détermenr imf et kerf. (1pt)

b) Démontrer que imf et kerf sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E ? (0,5 pt)

2- a) Montrer que fof = 3f. (0,25 pt)

b) Démontrer que pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de E, $\overrightarrow{u} \in imf \Leftrightarrow f(\overrightarrow{u}) = 3\overrightarrow{u}$. (0,25 pt)

Exercice 5 .... **[2 points]**

Une usine fabrique des ampoules à l'aide de trois machines A, B et C.

La machine A assure 20% de la production et 5% des ampoules fabriquées par A sont défectueuses .

La machine B assure 30% de la production et 4% des ampoules fabriquées par B sont défectueuses .

La machine C assure 50% de la production et 1% des ampoules fabriquées par C sont défectueuses .

1°/ On choisit au hasard une ampoule. Calculer les probablités des événements suivants :

a) E : << L'ampoule est défectueuse et produite par A >> (0,5pt)

b) F : << L'ampoule est défectueuse et produite par B >> (0,5pt)

2° / a) Montrer que la probabilité pour qu'une ampoule prise au hassard soit defectueuse est $\frac{27.}{1000}$ (0,5pt)

b) Calculer la probabilté pour qu'une ampoule provienne de A sachant qu'elle est défectueuse. (0,5pt)

MINSEC
REGION DU CENTRE
DEPARTEMENT DE MFOUNDI
COLLEGE POLYVALENT LA PERLE PLUS
B.P: 510 YDE
Examinateur : RAYE Yusuf

Année Scolaire: 2021/2022

Classe: Tle C

Date: /05/2022

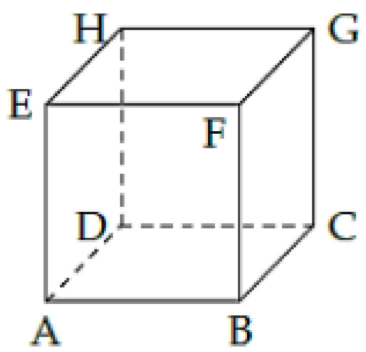
Coef: 07 et Durée: 03H00

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES/ ***(15,5 points)***

EXERCICE 1 / ***(04,5 points)***

Cet exercice regroupe deux blocs de questions pouvant être traités de façon indépendante.

1. On considère la plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. On note (Γ) l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la relation : $5z\bar{z}+(z+\bar{z}+1)^2-1$ où $\bar{z}$ est le conjugué de z.
   Soit φ la similitude directe plane d'angle $\frac{\pi}{2}$, de rapport 2 et de centre O; Ψ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout nombre complexe z, affixe d'un point M, associe le nombre $\Psi(z)$, affixe de $\varphi(M)$. On désigne par (Γ') l'image de (Γ) par φ.
   a. Démontrer que (Γ) est une ellipse et préciser ses éléments caractéristiques. **1.5pt**
   b. Donner l'expression de $\Psi(z)$ en fonction de z. **0.75pt**
   c. Donner en justifiant la nature exacte de (Γ'). **0.75pt**
2. On considère dans l'espace le cube ABCDEFGH ci-contre représenté. On note r_1 la réflexion de plan (ABCD) ; r_2 la réflexion de plan (ADHE) ; r_3 la réflexion de plan (ABFE) et r_4 la réflexion de plan (DCGH). On pose $s=r_1or_2or_3or_4$, $d=r_1or_2$ et $t=r_3or_4$. Il n'est pas demandé aux candidats de reproduire la figure.
   a. Montrer que d est un demi-tour dont on précisera l'axe. **0.5pt**
   b. Montrer que t est une translation dont on précisera la vecteur. **0.5pt**
   c. Reconnaitre et caractériser s. **0.5pt**



EXERCICE 2 / ***(03,75 points)***

N.B : Les exercices 2, 3 et 4 sont liés.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{j},\vec{k})$. Soit A le point d'affixe $3+i$ et B le point d'affixe 6. Pour tout réel u, on considère les deux points M_u et N_u d'affixes respectives $3-\sin(u)+i\cos(u)$ et $3(1+\cos(u))+3i\sin(u)$.

1. a. Peut-on avoir $M_u=N_u$? **0.5pt**
   b. En déduire que pour toute valeur de u, il existe une unique similitude directe T_u qui transforme A en M_u et B en N_u. **0.25pt**
2. a. Montrer que l'écriture complexe de T_u est $z'=e^{iu}z+3(1-e^{iu})$. **0.75pt**
   b. En déduire que pour tout u, T_u est une rotation dont on précisera le centre et l'angle. **0.5pt**
3. Soit E l'ensemble des transformations T_u pour $u\in\mathbb{R}$. On muni E de la loi de composition d'applications "o". Montrer que (E, o) est un groupe abélien. **0.75pt**
4. On pose $B_0=B$, $B_1=T_{\frac{\pi}{2}}(B_0)$, et pour tout entier naturel n non nul, $B_n=T_{\frac{\pi}{2^n}}(B_{n-1})$.
   a. Montrer par récurrence que $B_n=T_{\frac{2^n-1}{2^n}\pi}(B)$, pour tout entier naturel n. **0.5pt**
   b. Montrer que $n\in\mathbb{N}$, le point B_n a pour affixe $z_{B_n}=3+3\cos\left(\frac{2^n-1}{2^n}\pi\right)+3i\sin\left(\frac{2^n-1}{2^n}\pi\right)$ puis en déduire la position limite des points B_n quand n tend vers $+\infty$. **0.5pt**

EXERCICE 3 / ***(05 points)***

I. Soit (C) l'ensemble des points $M(x;\,y)$ tels que $(y^2-8y+15)e^{y-3}+3-x=0$. On note par (C_1) l'image de (C) par $T_{\frac{\pi}{2}}$.

1. Montrer que (C_1) a pour équation $y=(x^2+2x)e^{-x}$. **0.5pt**
2. Calculer l'intégrale $\int_0^x(t^2+2t)e^{-t}dt$ **0.5pt**

II. Soit la fonction numérique à variable réelle f définie par $f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$, (Sa courbe représentative est (C_1)).

1. Préciser l'ensemble de définition de f, calculer les limites aux bornes de cet ensemble puis en déduire l'existence d'une asymptote à (C_1). **1pt**
2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations. **1pt**
3. a. Déterminer la branche infinie de f en $-\infty$. **0.25pt**
   b. Tracer soigneusement (C_1) dans le repère. **0.75pt**
4. a. Calculer l'aire du domaine limité par (C_1), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 3$. **0.5pt**
   b. En déduire l'aire du domaine limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 3$ et $y = 3$. **0.5pt**

EXERCICE 4 / ***(02,75 points)***

Soit l'équation différentielle (F) : $y'' + 4y' + 4y = f(x)$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (F_0) : $y'' + 4y' + 4y = 0$. **0.5pt**
2. Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction numérique g de la variable réelle définie par $g(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ soit solution de (F). **0.75pt**
3. Soit h une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   a. Démontrer que h est solution de (F) si et seulement si $h - g$ est solution de (F_0) **0.75pt**
   b. En déduire la solution h de (F) qui s'annule en 0 et dont la courbe admet en ce point une tangente horizontale. **0.75pt**

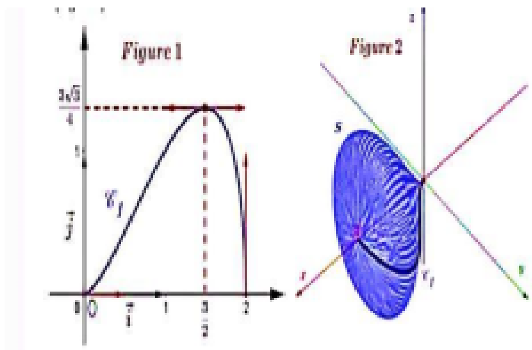
PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES/ ***(04,5 points)***

Afin de crypter ou coder et décoder des messages dans une banque, on utilise un chiffrement affine. La banque dispose d'une table de conversion des lettres dont chaque lettre de l'alphabet est associée à un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Un nombre x est associé à la lettre à coder puis on détermine le reste y de la division euclidienne de $7x + 5$ par 26, puis on en déduit la lettre associée à y (c'est elle qui code la lettre d'origine). Exemple : M correspond à $x = 12$; $7 \times 12 + 5 \equiv 11[26]$ et 11 correspond à la lettre L, donc la lettre M est codé par la lettre L. Sur le manuel d'utilisation de la machine qui gère le codage et le décodage du gestionnaire de la banque est inscrit le système codage-décodage : $y \equiv 7x + 5[26]$ équivaut à $x \equiv 15y + 3[26]$.

Un gestionnaire d'une banque veut construire chez lui un objet d'art ayant la forme de l'oignon représentée en la figure 2. Pour se faire, l'ingénieur considère la surface à réaliser son objet d'art comme un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 2m. L'ingénieur trace d'abord la courbe représentative de la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $[0; 2]$ par $f(x) = x\sqrt{2x - x^2}$ puis il opère la rotation de (C_f) au tour de l'axe $(O, \vec{\imath})$ engendrant un solide S ayant la forme de l'oignon représentée en la figure 2.



L'ingénieur possède trois bus pour ramener ses employés aux chantiers. Lorsqu'il utilise le premier bus qui a des bancs de 5 places, une personne reste mais lorsqu'il utilise le deuxième bus qui a des bancs de 7 places, 5 personnes restent. Finalement, il utilise le troisième bus qui a des bancs de 2 places et ce bus prend tout le monde.

1. Aider le gestionnaire de cette banque à faire un tableau codage-décodage de toutes les lettres alphabétiques qui lui permettra facilement de coder et décoder des messages des autres banques. **1,5pt**
2. Calculer le volume V du béton que peut prendre le solide S **1,5pt**
3. Quel est le nombre minimal que l'ingénieur peut transporter ? **1,5pt**

Enseignements secondaires
e-Learning mathématiques
672 50 50 48

Année Scolaire: 2021/2022
Classe: Tle C
Coef: 07 et Durée: 03H00

EXERCICE 1:

I. Une urne contient neuf boules indiscernables au toucher parmi lesquelles deux portent le numéro 4 ; trois portent le numéro -1 et quatre portent le numéro 2. Une épreuve consiste à choisir successivement et sans remise deux boules. La 1ère boule extraite porte alors le numéro « a » et la 2ième boule le numéro « b ». On définit alors :

- ❖ L'équation (F) : ax+by=3, où les inconnues x et y sont des entiers relatifs.
- ❖ L'entier naturel N qui s'écrit $\overline{a3b}$ en base 5.
- ❖ L'endomorphisme f du plan vectoriel E dont la matrice dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de E est $M\begin{pmatrix}-1 & 2\\ a & b\end{pmatrix}$.

Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « L'équation (F) n'a pas de solution » **0,5pt**
B : « Le couple (1, 1) est solution de (F) » **0,5pt**
C : « L'entier N est multiple de 4 » **0,5pt**
D : « f est un automorphisme » **0,5pt**

II. (E) : $y' + 2y = 2cosxe^{3x}$; (E') : $y' + 2y = 0$.

1. $P(x) = (acosx + bsinx)e^{3x}$. Trouver les réels $a\ et\ b$ tels que P soit solution de (E). **1pt**
2. Résoudre (E'). Prouver que f est solution de (E) si et seulement si $f - P$ est solution de (E'). **1pt**
3. Résoudre alors (E). **0,5pt**

III. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$; f_λ la fonction de variable réelle définie par : $f_\lambda(x) = \frac{x+\lambda}{x^2+1}$.

1. Démontrer que f_λ admet deux extréma locaux en deux réels $a\ et\ b$ $(a < b)$. **1pt**
2. On pose m_λ le au minimum de f_λ sur $\mathbb{R}$ et M_λ le maximum de f_λ sur $\mathbb{R}$.
Justifier que $m_\lambda = \frac{1}{2a}$ et $M_\lambda = \frac{1}{2b}$. **1pt**
3. Calculer $\lim_{\lambda\to+\infty} m_\lambda$; $\lim_{\lambda\to+\infty} M_\lambda$; $\lim_{\lambda\to-\infty} m_\lambda$ et $\lim_{\lambda\to-\infty} M_\lambda$. **1pt**
4. On pose λ=1. Tracer la courbe (C_1) de f_1. Unité :2cm. **1pt**
5. En posant $x = tan\alpha$, calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$. En déduire $\int_0^1 f_1(x)dx$. **1pt**
6. Soit (Δ)={M(x ;y) tels que $0 \le x \le 1$ et $0 \le y \le f_1(x)$}. On fait tourner (Δ) autour de l'axe des abscisses ce qui engendre le solide (S). Calculer le volume de (S). **1pt**

EXERCICE 2:

Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie par : $\begin{cases} f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{lnt}dt, & si\ x \ne 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f. **0,5pt**
2. Justifier que f est dérivable sur $\left[0;\frac{1}{2}\right[\cup \left]1;+\infty\right[$. (on poura introduire la fonction h : t $\mapsto \frac{1}{lnt}$). Calculer $f'(x)$. **1pt**
3. Démontrer que $\forall x \in \left[0;\frac{1}{2}\right[\cup \left]1;+\infty\right[$; $\frac{x}{\ln(2x)} \le f(x) \le \frac{x}{lnx}$. Trouver $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. **1pt**
4. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0^+. **0,5pt**
5. Soit la fonction φ définie par $\varphi(t) = 2 - 2t + lnt$, avec $t \in]0;1]$.
a) Etudier les variations de φ sur $]0;1]$. En déduire qu'il existe un unique $\alpha \in \left]0;\frac{1}{2}\right[$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$. **1pt**
b) Justifier que $\forall t \in [\alpha;1[;\ lnt \ge 2t - 2$. **0,5pt**
c) Montrer que $\forall x \in \left[\alpha;\frac{1}{2}\right[;\ f(x) \le \frac{1}{2}\int_x^{2x}\frac{1}{t-1}dt$. **0,5pt**
d) Trouver alors $\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x)$. **0,5pt**

6. a) Justifier que $0 < lnt < t - 1$. **0,5pt**
b) En déduire $\lim_{x\to1^+} f(x)$. **0,5pt**
7. Déterminer le tableau de variation de f. **1pt**
8. Par la méthode des rectangles (en subdivisant l'intervalle en 5 parties) donner une valeur approchée de $f(2)\ et\ f(4)$. **1pt**
9. Donner une esquisse de (Cf). On pensera à étudier les branches infinies. **1pt**

Enseignements secondaires
e-Learning mathématiques
672 50 50 48

Année Scolaire: 2021/2022

Classe: Tle C

Coef: 07 et Durée: 03H00

Partie A : Evaluation des ressources EXERCICE 1: / 3,75pts

I. On lance deux fois de suite un dé tétraédrique parfaitement équilibré dont deux faces portent le numéro 2 et les deux autres les numéros 5 et 4, et on note a le numéro de la face cachée à l'issue du premier lancer et b le numéro de la face cachée à l'issue du deuxième lancer. P_i est la probabilité qu'au cours d'un lancer, la face numérotée $i(i \in \{2;4;5\})$ soit cachée. On considère l'équation différentielle (E):$y'' - ay' + by = 0$; la fonction g:$x \mapsto e^x$ et l'hyperbole d'équation réduite (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Justifier que $P_1 = \frac{1}{2}\ et\ \ P_4 = P_5 = \frac{1}{4}$. **0,5pt**

2. Déterminer $P(A)$ avec A: « La fonction $x \mapsto e^x$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de (E) ». **0,5pt**

3. Déterminer $P(B)$ avec B: « Une équation de (H) dans un repère dont les axes sont ses asymptotes est : $Y = \frac{1}{X}$ ». **0,5pt**

4. On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque éventualité $(a;b)$ associe le réel $|a - b|$.

a) Donner l'ensemble des valeurs prises par X. **0,25pt**

b) Déterminer la loi de probabilité de X. **0,5pt**

II. (E) : $y' + 2y = 2cosxe^{3x}$; (E') : $y' + 2y = 0$.

1. $P(x) = (acosx + bsinx)e^{3x}$. Trouver les réels $a\ et\ b$ tels que P soit solution de (E). **0,5pt**

2. Résoudre (E'). Prouver que f est solution de (E) si et seulement si $f - P$ est solution de (E'). **0,5pt**

3. Résoudre alors (E). **0,5pt**

EXERCICE 2: / 4,25pts

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; f_λ la fonction de variable réelle définie par : $f_\lambda(x) = \frac{x+\lambda}{x^2+1}$.

1. Démontrer que f_λ admet deux extréma locaux en deux réels $a\ et\ b\ (a < b)$. **0,5pt**

2. On pose m_λ le au minimum de f_λ sur $\mathbb{R}$ et M_λ le maximum de f_λ sur $\mathbb{R}$.

Justifier que $m_\lambda = \frac{1}{2a}$ et $M_\lambda = \frac{1}{2b}$. **0,5pt**

3. Calculer $\lim_{\lambda\to+\infty} m_\lambda$; $\lim_{\lambda\to+\infty} M_\lambda$; $\lim_{\lambda\to-\infty} m_\lambda$ et $\lim_{\lambda\to-\infty} M_\lambda$. **1pt**

4. On pose λ=1. Tracer la courbe (C_1) de f_1. Unité :2cm. **1pt**

5. En posant $x = tan\alpha$, calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$. En déduire $\int_0^1 f_1(x)dx$. **0,75pt**

6. Soit (Δ)={M(x ;y) tels que $0 \le x \le 1$ et $0 \le y \le f_1(x)$}. On fait tourner (Δ) autour de l'axe des abscisses ce qui engendre le solide (S). Calculer le volume de (S). **0,5pt**

EXERCICE 3: / 7,5pts

Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie par : $\begin{cases} f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{lnt}dt, & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f. **0,25pt**

2. Justifier que f est dérivable sur $\left[0;\frac{1}{2}\right[\cup]1;+\infty[$. (on poura introduire la fonction h : t $\mapsto \frac{1}{lnt}$). Calculer $f'(x)$. **0,75pt**

3. Démontrer que $\forall x \in \left[0;\frac{1}{2}\right[\cup]1;+\infty[$; $\frac{x}{\ln(2x)} \le f(x) \le \frac{x}{lnx}$. Trouver $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. **0,75pt**

4. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0^+. **0,5pt**

5. Soit la fonction φ définie par $\varphi(t) = 2 - 2t + lnt$, avec $t \in]0;1]$.

a) Etudier les variations de φ sur $]0;1]$. En déduire qu'il existe un unique $\alpha \in \left]0;\frac{1}{2}\right[$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$. **1pt**

b) Justifier que $\forall t \in [\alpha;1[$; $lnt \ge 2t - 2$. **0,25pt**

c) Montrer que $\forall x \in \left[\alpha;\frac{1}{2}\right[$; $f(x) \le \frac{1}{2}\int_x^{2x} \frac{1}{t-1}dt$. **0,5pt**

d) Trouver alors $\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x)$. **0,5pt**

6. a) Justifier que $0 < lnt < t - 1$. **0,25pt**

b) En déduire $\lim_{x\to1^+} f(x)$. **0,5pt**

7. Déterminer le tableau de variation de f. **0,75pt**

8. Par la méthode des rectangles (en subdivisant l'intervalle en 5 parties) donner une valeur approchée de $f(2)\ et\ f(4)$. **0,75pt**

9. Donner une esquisse de (Cf). On pensera à étudier les branches infinies. **0,75pt**

<u>Partie B :</u> Evaluation des compétences

M. NANA est invité à la base navale de la ville de Douala. Il fait des réservations dans deux types d'hébergements : l'hébergement A et l'hébergement B. Une nuit à l'hébergement A coûte 12 000f et une nuit à l'hébergement B coûte 22 500f. Il se rappelle que le coût total de sa réservation dans les deux types d'hébergement est de 219 000f et qu'il aurait passé au maximum 13 nuits à l'hébergement A.

La base navale possède une piste d'athlétisme qui est un terrain délimité par les cercles (C_1) et (C_2) tels que (C_1) est le cercle de centre I d'affixe $z_I = \frac{(\sqrt{3}+i)^9}{(1+i)^{12}}$ et de rayon $\sqrt{2}$. (C_2) est l'image de (C_1) par la similitude directe S d'écriture complexe $z' = (-1+i)z + 2i$.

M. NANA voudrait estimer la superficie de cette piste d'athlétisme. Le camp d'armement peut être assimilé à un plan (ABC) de sorte que si on munit l'espace d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ tel que $(O;\vec{i},\vec{j})$ soit un repère du plan ; alors $A(1\,;2\,;3)$; $B(-1\,;3\,;1)\ et\ C(2\,;-1\,;2)$. Une caméra y est fixée en un point K, point d'intersection du plan (ABC) et la droite dont un système d'équation cartésienne est $\begin{cases} -4x+7y=4 \\ 5x+7y=9 \end{cases}$.

Intrigué, **M. NANA** voudrait savoir en quel point K est fixée cette caméra.

Tâches :

1. Déterminer le nombre d'hébergements passés dans chacun des deux types d'hébergement. **1,5pt**

2. Aider **M. NANA** à estimer la superficie de la piste d'athlétisme. **1,5pt**

3. Aider **M. NANA** à déterminer les coordonnées du point K. **1,5pt**

Enseignements secondaires
e-Learning mathématiques
672 50 50 48

Année Scolaire: 2021/2022

Classe: Tle C

Coef: 07 et Durée: 03H00

Exercice 1 .... **[3.25 points]**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O ;i,j), on considère l'application f qui au point M de coordonnées (x,y) associe le point M' de coordonnées (x',y') tel que : $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$.

On note z l'affixe de M et z' l'affixe de M'.

1-a) Exprimer z' en fonction de z. **0.5pt**

b) Démontrer que f = r o s où s est la réflexion d'axe (O ; $\vec{i}$) et r une rotation affine à préciser. **0.75pt**

2- Décomposer en deux symétries orthogonales et en déduire que f est une réflextion dont ont précisera l'axe. **0.5pt**

3- On note g l'application qui au point M de coordonnées (x,y) associe le point M" de coordonnées (x",y") tel que : $\begin{cases} x" = y + 1 \\ y" = x + 1 \end{cases}$

a) Exprimer l'affixe z" de M" en fontion de l'affixe z de M. **0.5pt**

b) Motrer que g = t o f où t est une translation que l'on caractérisera. **0.5pt**

c) Montrer que le mileu K du segment [MM"] appartient à une droite fixe lorsque M parcourt le plan. **0.5pt**

Exercice 2 .... **[4.5 points]**

I/ Pour tout entier naturel n non nul, on considère les nombres suivants :

$a_n = 2 \times 10^n - 1$; $b_n = 2 \times 10^n + 1$; $c_n = 4 \times 10^n - 1$.

1) a) Calculer les nombres a_n; b_n et c_n pour tout nombre entier naturel $n \in \{1, 2\}$. **0.75pt**

b) Combien les écritures décimales des nombres b_n et c_n ont-elle de chiffres ? **0.25pt**

c) Montrer que b_n et c_n sont divisibles par 3. **0.5pt**

1) a) Montrer en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 que a_3 est premier. **0.5pt**

b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $a_n \times b_n = c_{2n}$ et en déduire la décomposition en produit des facteurs premiers du nombre a_6. **0.5pt**

c) Montrer que $PGCD(a_n, b_n) = PGCD(a_n, 2)$ puis déduire que $a_n \wedge c_n$=1 . **0.5pt**

II/ Soit $\mathcal{E}$ l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(0, 0, \frac{1}{4})$, $B(0, 0, -\frac{1}{4})$ et $F(0, 5, 0)$.

1) Soit $M(x, y, z)$ un point de $\mathcal{E}$.

a) Calculer les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}$. **0.5pt**

b) Déterminer le point M_o tel que $\overrightarrow{M_oA} \wedge \overrightarrow{M_oB} = \overrightarrow{M_oF}$. **0.5pt**

2) Déterminer l'ensemble $(-)$ des points M de $\mathcal{E}$ tels que $\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{M_oF}\right\|$. **0.5pt**

Exercice 3 .... **[3.5 points]**

On considère $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$ pour $x \neq 0$; $f(0) = 1$ sinon et (C_f) sa représentation graphique.

I/ On considère la fonction la fonction g définie par $g(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_g de g. **0.25pt**

2) a) Calculer les limtes de g à droite de -1 et en $+\infty$. **0.5pt**

b) Démontrer que g est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et déterminer sa dérivée g'. **0.5pt**

c) En déduire le signe de $g(x)$. **0.5pt**

II/ Soit $h : x \mapsto \ln(x+1) - \frac{2x}{x+2}$ une fonction

1) Démontrer que , pour tout nombre réel $]-1, +\infty[$, $h(x) \leq \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$. **0.5pt**

2) a) Démontrer que, pour tout nombre réel $x \in [0, +\infty[$, $0 \leq h'(x) \leq \dfrac{x^2}{4}$. **0.75pt**

b) En déduire que, pour tout nombre réel $x \in [0, +\infty[$, $0 \leq h(x) \leq \dfrac{x^3}{12}$. **0.5pt**

3) D'après ce qui précède , démontrer que pour tout nombre réel $[0, +\infty[$: $-\dfrac{x^3}{12} + \dfrac{x^2}{x+2} \leq x - \ln(x+1) \leq \dfrac{x^2}{x+2}$. **0.5pt**

"J'admire l'efficacité du savoir pour ce qu'elle atteste une connivence avec le réel. Ce n'est pas d'agir sur les choses qui importe, mais en le pouvant de montrer qu'on parle leur langage."

"Si j'effectue un travail de 10h de temps en 10min, c'est parce que j'ai passé 10ans à apprendre à le faire correctement"

"Choisissez un travail que vous aimiez dans la vie, et vous n'auriez pas à travailler un seul jour"

"Vous me devriez plutot des années et non des minutes. Donc pensez souvent avant d'agir."

1 Tableau des 7 profils d'apprentissage

Profil identité

L'intellectuel

L'intellectuel aime apprendre. Généralement il affectionne la solitude. Introverti il peut paraître distant vis à vis des autres. Il est souvent bon élève.

Le dynamique

Le dynamique aime agir. Il a le don de réussir dans ce qu'il a décidé d'entreprendre. Cela n'en fait pas automatiquement un bon élève. Il compte beaucoup sur son sens de la débrouillardise

L'aimable

L'aimable travaillera plus pour faire plaisir à ses parents, à ses professeurs. Sociable et gentil c'est un élève très agréable. Cependant il a besoin d'attention pour pouvoir s'épanouir.

Le perfectionniste

Le perfectionniste a horreur de mal faire. Il a une faculté à voir ce qui pourrait aller de travers. Soucieux et inquiet, il prend le temps de faire les choses correctement.

L'émotionnel

L'émotionnel agit en fonction de ses émotions difficilement contrôlées et peut réagir de façon théâtrale. Il possède un esprit très créatif et aime se différencier de ses camarades.

L'enthousiaste

L'enthousiaste a une forte joie de vivre. Il a une grande faculté a percevoir le coté positif des choses. Cependant l'ordre et la discipline ont tendance à le frustrer.

Le rebelle

De peur d'être blessé, le rebelle, évite de monter tout signe de faiblesse. Il n'hésite alors pas à rentrer en confrontation mêlée à des accès de colère. Il peut donc devenir un élève difficile.

Profil de motivation

Quelle utilité?

La motivation dépend du degré d'utilité perçue de l'enseignement. Ces personnes aiment d'avantage le concret.

Vais-je apprendre?

C'est une motivation pour apprendre. Ces personnes aiment savoir pour savoir et sont curieuses d'esprit.

Avec qui?

La motivation est centrée sur les personnes : quel professeur vais-je avoir? Avec quels camarades vais-je faire des travaux pratiques?

Où ça se situe?

Besoin de situer les choses, dans un plan, dans une vision globale, dans un lieu. Ces personnes sont sensibles à l'environnement.

Profil de compréhension

Auditif

La compréhension s'effectue principalement par l'écoute

Visuel

La compréhension s'effectue principalement par ce qui est vu

Kinesthésique

La compréhension s'effectue principalement ce qui est ressenti. C'est apprendre en faisant

"Si je pouvais encore rentrer au secondaire, je choisirais sans la moindre hésitation d'etre un perfectionniste" RAYEZ