TERMINALE D

TRAVAUX DIRIGÉS : NOMBRES COMPLEXES - SUITES DE FONCTIONS

PAR GILDAS MBA OBIANG

Exercice 1. Nombres complexes- suites numériques

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3-1=0$
2. Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 2 cm)
   On considère les points A, B et C d'affixes respectifs :
   $$z_A=1\ ;\ z_B=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ et } z_C=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
   a) Déterminer la forme exponentielle de z_B.
   b) Construire avec précision les points A, B et C.
3. Soit le nombre complexe $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$.
   a) Donner une interprétation géométrique du module et un argument du nombre complexe $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$.
   b) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$.
   En déduire la nature exacte du triangle ABC.
4. Soit la suite (u) définie par $u_n=z_C^n$ pour tout entier naturel n.
   a) Déterminer en fonction de n un argument de u_n.
   b) Pour quelles valeurs de n, u_n est-il un réel ?
   Calculer ce nombre réel.
5. Soit la somme $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}u_k$
   a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $S_n=\frac{1-e^{\frac{2\pi n}{3}i}}{1-e^{\frac{2\pi i}{3}}}$
   b) En déduire que pour tout entier naturel n, $S_n=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)e^{\frac{\pi(n-1)}{3}i}$

Solution.

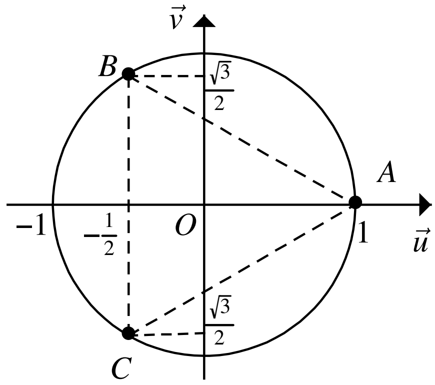
1. $z^3-1=0 \Leftrightarrow z^3=1 \Leftrightarrow z^3=e^{2k\pi i}$ avec $k\in\mathbb{Z}$. Par suite, les solutions de l'équation considérée sont les nombres complexes z_k définie par :
   $$z_k=e^{\frac{2\pi k}{3}i},\ \ k\in\{0,1,2\}$$
   Ainsi, les solutions cherchées sont : $S=\left\{1,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$
2. a) On a de façon directe que : $z_B=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{\frac{2\pi}{3}i}$

b) Plaçons les points A, B et C dans un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 2 cm).

Programme de construction :

Les points A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.

- on trace d'abord ce cercle ;
- puis on place les points B et C points d'intersection de ce cercle avec la droite d'équation $x=-\dfrac{1}{2}$.



3. Posons $Z=\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$

   a) $|Z|=\left|\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right|=\dfrac{|z_B-z_A|}{|z_C-z_A|}=\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}$ et $\arg(Z)=\mathrm{mes}(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})$.

   b) On a $Z=\dfrac{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-1}{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-1}=\dfrac{-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\dfrac{\left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2}{\left(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}=\dfrac{\frac{9}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{4}}{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}=\dfrac{\frac{6}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i}{3}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

   Ainsi, $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=e^{-\frac{\pi}{3}i}$ par suite $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}=\left|e^{-\frac{\pi}{3}i}\right|=1$ et $\mathrm{mes}(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})=-\frac{\pi}{3}$. Ce qui prouve que ABC est une triangle équilatéral.

4. Soit la suite (u) définie par : $u_n=z_C^n=\left(e^{-\frac{2\pi}{3}i}\right)^n$ pour tout entier naturel n.

   a) $\arg(u_n)=\arg\left(e^{-\frac{2\pi}{3}i}\right)^n=n\times\arg\left(e^{-\frac{2\pi}{3}i}\right)=-\frac{2\pi n}{3}$ pour tout entier naturel n.

   b) $u_n\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \mathrm{Im}\left(e^{-\frac{2\pi}{3}i}\right)^n=0\Leftrightarrow -\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)=0\Leftrightarrow \frac{2\pi n}{3}=k\pi\Leftrightarrow 2n=3k\Leftrightarrow$ n est un muliple de 3. On en déduit que la suite (u) est réelle si et seulement si n est divisible par 3 et dans ce cas elle vaut 1.

5. Soit la somme $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_{n-1}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}u_k$

   a) S_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $e^{-\frac{2\pi}{3}i}\neq 1$ et de premier terme $u_0=1$ donc pour tout entier naturel $n\geqslant 1$:

$$S_n=1+e^{-\frac{2\pi}{3}i}+\cdots+\left(e^{-\frac{2\pi}{3}i}\right)^{n-1}=\frac{1-e^{\frac{2\pi n}{3}i}}{1-e^{\frac{2\pi i}{3}}}$$

   b) On a $S_n=\dfrac{1-e^{\frac{2\pi n}{3}i}}{1-e^{\frac{2\pi i}{3}}}=\dfrac{e^{\frac{\pi n}{3}i}\left(e^{-\frac{\pi n}{3}i}-e^{\frac{\pi n}{3}i}\right)}{e^{\frac{\pi}{3}i}\left(e^{-\frac{\pi}{3}i}-e^{\frac{\pi}{3}i}\right)}=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}\left(e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^{n-1}$ puis que $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ on en déduit que $S_n=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(\dfrac{\pi n}{3}\right)e^{\frac{\pi(n-1)}{3}i}$ □

Exercice 2. Suite de fonctions

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n + 2x^2 + x - 1$.

1. Montrer que f_n est strictement croissante et qu'il existe un unique réel $x_n \in \left[0;\dfrac{1}{2}\right]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que pour tout $x \in [0;1]$, on a $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x)$.

   Déduis - en que la suite (x_n) est convergente.
3. Montrer que la suite (x_n^n) converge vers 0. Déduis-en la limite de x_n.

Solution.

1. f_n est une fonction polynôme par conséquent elle est dérivable sur $[0;1]$ et on a pour tout $x \in [0;1]$, $f_n'(x) = nx^{n-1} + 4x + 1 > 0$. Ainsi, f_n est strictement croissante sur l'intervalle $[0;1]$. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0	$\frac{1}{2}$	1
f_n	-1	$\frac{1}{2^n}$	3

Tableau de variation de f_n.

   On a $f_n(-1) \times f_n\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$ par le corrolaire du théorème des valeurs intermédiaires on en déduit qu'il existe un unique réel $x_n \in \left[0;\dfrac{1}{2}\right]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

2. On a $f_n(x) - f_{n+1}(x) = x^n + 2x^2 + x - 1 - (x^{n+1} + 2x^2 + x - 1) = (1-x)x^n$

   Ainsi, on en déduit que pour tout $x \in [0;1]$ donc $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x)$. En particulier , pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $f_n(x_{n+1}) \geqslant f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ par suite $f_n(x_{n+1}) \geqslant f_n(x_n)$ d'où $x_{n+1} \geqslant x_n$. De ce fait, (x_n) est une suite croissante et majorée par $\frac{1}{2}$ donc elle converge.

3. D'une part, par définition de la suite (x_n) on a, pour tout entier $n \geqslant 1$, $0 \leqslant x_n \leqslant \dfrac{1}{2}$ mais la fonction $x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur $x \in [0;1]$ donc $0 \leqslant x_n^n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. Par le théorème d'encradrement, il s'ensuit que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n^n = 0$.

   D'autre part, pour tout entier $n \geqslant 1$, $x_n(1 + 2x_n) = -x_n^n + 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n(1 + 2x_n) = 1$ et en notons $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$ on a $2\ell^2 + \ell - 1 = 0$. Mais sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ le réel $\dfrac{1}{2}$ est le seule qui vérifie l'équalité $2\ell^2 + \ell - 1 = 0$ car $2(\ell + 1)\left(\ell - \frac{1}{2}\right) = 2\ell^2 + \ell - 1$.

   En conclusion :

   La suite (x_n) converge vers le réel $\dfrac{1}{2}$.