COLLÈGE VOGT		Année scolaire 2021-2022
Département de Mathématiques	**MINI SESSION**	**Situation Scolaire N°2** **Date : 02 et 03 Novembre 2021**

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Niveau : **Tle D et Tle TI** Durée : **04 heures** Coef: 4

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES

Exercice 1 02,00 Points **(Uniquement pour la D)**

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, le système (S): $\begin{cases} iz + z' = i(cos\theta + isin\theta) \\ z + iz' = cos\theta - sin\theta \end{cases}$ où θ est un nombre réel.

1- Résoudre(S). ***1,5pt***

2- Déterminer le module du nombre complexe $u = (z + z')^{2022}$. ***0,5pt***

Exercice 1 : 02,00 Points **(Uniquement pour la TI)**

L'objectif est de trouver l'ensemble des multiples de 17 dont le chiffre des unités est 3. La problème revient donc à résoudre l'équation (E): $17x \equiv 3[10]$.

1- Montrer que l'équation (E) équivaut à $17(x - 9) \equiv 0[10]$. ***0,75pt***

2- Déterminer alors les valeurs possibles de x. ***0,75pt***

3- En déduire le premier de ces nombres supérieur à 1000. ***0,5pt***

Exercice 2 : 04,5 Points

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x+1}$.

1- Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. ***1pt***

2- Démontrer que f admet un prolongement par continuité en -1. ***0,75pt***

3- Soit g le prolongement par continuité de f en -1.

a) Montrer que $g'(x) = \frac{3x-1+2\sqrt{3x^2+1}}{(x+1)^2\sqrt{3x^2+1}}$. ***1pt***

b) Justifier que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. ***0,5pt***

c) Dresser le tableau de variation de g. ***0,5pt***

4- Pour tout $x > -1$, on pose $h(x) = (x + 1)f(x)$. Etudier les branches infinies de h en $+\infty$. ***0,75pt***

Exercice 3 : 03,00 Points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{u};\ \vec{v})$. On considère l'application f définie dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombre complexe par $f(z) = \frac{z^2}{z+i}$ avec $z \neq -i$.

1- Déterminer les racines carrées du nombre complexe $k = -28 + 96i$. ***1pt***

2- Déterminer les nombres complexes z_1 et z_2 vérifiant la relation $f(z) = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$, z_1 ayant une partie imaginaire positive. ***1pt***

3- Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit imaginaire pur. ***1pt***

Exercice 4 : 06,00 Points

On considère les fonctions f et g définies par $g(x) = 4x^3 - 3x - 8$ et $f(x) = \frac{x^3+1}{4x^2-1}$.

1- Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variation. **1,5pt**

2- a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$. **0,5pt**

b) Justifier que $\alpha \in]1;2[$; puis donner un encadrement de α à 10^{-2}près **1pt**

c) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. **0,5pt**

3- Montrer que $f'(x) = \frac{xg(x)}{(4x^2-1)^2}$. Puis dresser le tableau de variation de f. **1pt**

4- a) Montrer que $f(\alpha) - \frac{3}{8}\alpha = 0$. **0,75pt**

b) En déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2}près. **0,75pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES 04,5 POINTS

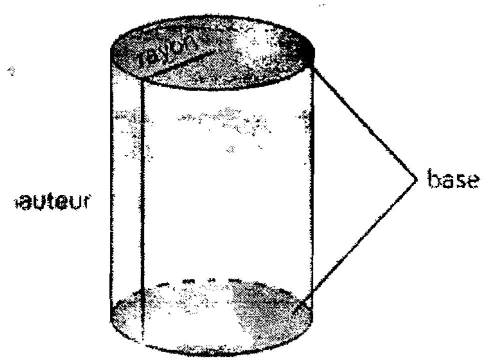
Compétences à développer : *Résoudre une situation problème, déployer un raisonnement mathématique et communiquer à l'aide du langage mathématique dans les situations de vie où interviennent la résolution des équations, la recherche d'extremum et le calcul d'aire d'une surface.*

Situation :

Le laboratoire de M. Tiyon s'intéresse à l'analyse de l'expansion d'un virus au sein d'une population dans un quartier. Dans ce quartier le virus s'attaque uniquement à la population jeune qui est de 70% de cette population. Le quartier ciblé par le laboratoire a été cartographié et repéré en modèle complexe par les points **GPS** suivants : $A(-1+i)$; $B(4+i)$; $C(2+4i)$ et $D(-1+4i)$ d'unité 1 km. La densité de la population de ce quartier est de 500 habitants au km^2.

Le laboratoire modélise donc par $f(t) = -t^2 + 100t$ le nombre estimé d'individus infectés par le virus dans ce quartier en fonction du temps t en jours. Le Chef du quartier débourse chaque jour dans la caisse maladie du quartier la somme de 500 francs pour chaque nouveau cas détecté.

Pendant que M. Tiyon et son équipe sont plongés dans les analyses, le petit Simon prend un bocal, dans ce laboratoire, ayant la forme d'un cylindre dont le diamètre intérieur est de 10 cm, il y verse de l'eau jusqu'à une hauteur de 4 cm. Il plonge une boule de métal, dont le rayon est compris entre 3 cm et 5cm, dans cette eau et il est alors émerveillé de constater que l'eau recouvre exactement la boule. Il voudrait alors avoir une valeur approchée à 10^{-1} près de la nouvelle hauteur de l'eau dans le bocal.



Rappel
- Volume d'un cylindre de rayon de base r et de hauteur h $\boldsymbol{V = \pi r^2 h}$.
- Volume d'une boule de rayon r : $\boldsymbol{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$.

Tâches :

1- Déterminer la population jeune ciblée par cette analyse. **1,5pt**

2- Aider Simon à résoudre son problème. **1,5pt**

3- Quelle somme pourra débourser au maximum le chef du quartier en un jour ? **1,5pt**