COLLEGE PRIVE MONGO BETI B.P 972 TEL22 22 46 19 YAOUNDE					
ANNEE SCOLAIRE	SEQUENCE	EPREUVE	CLASSE	DUREE	COEF
2021/2022	5	MATHS	TC	4H	7
Nom du professeur: M. KAMTO					

EXERCICE 1 / 3,5pts

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{u};\vec{v})$. Soit f une transformation du plan qui à tout point $M(x;y)$ associe le point $M'(x';y')$ tel que : $\begin{cases} x' = \frac{12x+5y+1}{13} \\ y' = \frac{5x-12y-5}{13} \end{cases}$

I/ On pose $z = x + iy$ $et\ z' = x' + iy'$ les affixes respectives de M et M'

1) Déterminer deux nombres complexes $a\ et\ b$ tels que $z' = a\bar{z} + b$. 0,5pt
2) On désigne par z" l'affixe de $M'' = f°f(M)$. Exprimer z'' en fonction de z. 0,5pt
3) Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = M$
   a) Montrer que (E) est une droite d'équation $x - 5y - 1 = 0$. 0,5pt
   b) Soit M un point n'appartenant pas à (E) $et\ f(M) = M'$. Montrer que les droites (MM') et (E) sont perpendiculaires. 0,5pt
   c) Montrer que pour tout point M du plan, le point I milieu du segment [MM'] appartient à (E). 0,5pt
   d) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f. 0,5pt

II/ Soit (E') l'ensemble des points M du plan tels que $f(M)$ appartient à l'axe $(O\,;\vec{v})$.

1) Vérifier que $A(0;-\frac{1}{5})$ appartient à (E'). 0,25pt
2) Caractériser les points de (E') ayant les coordonnées entières. 0,5pt
3) On désigne par (E") la droite d'équation $y = 1$. Déterminer les points M de (E") à coordonnées entières tels que $f(M)$ ait des coordonnées entières. 0,5pt

EXERCICE 2/3,5pt

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) Unité graphique 2cm.

Soit f la transformation du plan dans lui-même qui à tout point $M(x,y)$ associe le point $M'(x',y')$ tel que $\begin{cases} x' = \frac{1}{4}x - \frac{\sqrt{3}}{4}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{4}y \end{cases}$

1) a) Donne l'écriture complexe de f. 0,25pt
   b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f. 0,5pt
2) Soit (Γ) l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan tels que $7x^2 + 13y^2 - 6\sqrt{3}\,xy = 64$ et (Γ') son image par f.
   a) Déterminer une équation cartésienne de (Γ'). 0,5pt
   b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (Γ'). 0,5pt
   c) En déduire que (Γ) est une ellipse dont on déterminera son centre, les foyers, le sommet et l'excentricité.
   d) Construire (Γ') et (Γ) dans le même repère. 1pt

EXERCICE 3/4,5pts

1) calcule chacune des intégrales suivantes : $I = \int_0^{\ln 3} \frac{1}{1+e^x}dx$ et : $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2x^3+x^2+2x+3}{x^2}dx$. 1pt

2) On considère les suites numériques (a_n) et (b_n) définies pour tout entier naturel non nul n par : $a_n = \int_0^1 x^n cosx\, dx$ et $b_n = \int_0^1 x^n sinx\, dx$.

a) Calculer a_1 et b_1. 0,5pt

b) Montrer que la suite (a_n) est à termes positifs et décroissante. 0,5pt

c) Démontrer que pour tout entier non nul n, $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n+1}$ 0,5pt

d) En déduire que la suite (a_n) est convergente et déterminer sa limite . 0,5pt

e) A laide d'une intégration par partie, démontrer que pour tout entier naturel non nul n, $a_{n+1} = -(n+1)b_n + sin1$. 0,5pt

f) *puis en* déduire la limite de la suite (b_n). 0,25pt

g) Démontrer qe pour tout entier naturel non nul n $b_{n+1} = (n+1)a_n - cos1$. 0,5pt

h) En déduire la limite de la suite (na_n). 0,25pt

EXERCICE 4/4,5pts

On considère les fonctions f et g définies sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = ln(1 + xe^{-x})$ et $g(x) = ln(x + e^x)$. On désigne par (C_f) *et* (C_g) les courbes représentatives des fonctions f et g dans le plan muni rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}; \vec{j})$ unité graphique 2cm.

1) Etudier les variations de la fonction g et dresser son tableau des variations. 0,75pt
2) Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau des variations. 0,75pt
3) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = g(x) - x$. Et en déduire les positions relatives (C_f) *et* (C_g). 0,5pt
4) Tracer soigneusement (C_f) *et* (C_g). 0, 75pt
5) Soit α un réel strictement positif. On pose $A(\alpha)$ l'aire en centimètres carrés du domaine du plan délimité par la courbe (C_f), *l'axe des abscisses*, les droites d'équations $x = 0$ *et* $x = \alpha$.

a) Montrer que $A(\alpha) \leq 4\alpha f(1)$. 0,5pt

b) A l'aide d'une intégration par partie, calculer en fonction de $\int_0^\alpha te^{-t}dt$. 0,5pt

c) Montrer que pour tout réel t supérieur ou égal à zéro, $ln(1 + t) \leq t$.. 0,5pt

d) En déduire que $A(\alpha) \leq 4 - 4e^{-\alpha} - 4\alpha e^{-\alpha}$. 0,5pt

PARTIE B/ EVALUATION DES COMPETENCES : 4,5pts

Les constructions de deux maisons A et B ont couté respectivement 8 000 000 et 12 000 000 de francs à un opérateur économique. Il met ses deux maisons en location le premier janvier 2019. Le loyer annuel de la maison A est de 800 000F et celui de la maison B est de 1 200 000F. A partir de l'année 2020 et au début de chaque année, le loyer annuel de la maison A augmente de 20 000F et le loyer annuel de la maison B augmente de 5%. Ce monsieur verse séparément la totalité des loyers perçus chaque année dans deux comptes bloqués d'une banque de la place.

Par ailleurs, dans l'une de ses activités, cet opérateur a un dépôt de ciment où son comptable suit la fonction de vente selon l'année par $f(t) = \frac{t^2}{2}(lnt - \frac{3}{2})$ où t représente le nombre d'année. Il décide de d'examiner la fiche de vente et constate qu'elle décroit sur [0 ;6] et cherche à connaitre à quel moment elle atteindra son minimum .

TACHES

1) Déterminer en quelle année cet opérateur économique recouvrira le coût de la construction de maison A à partir de son loyer. 1,5pt
2) Déterminer en quelle année cet opérateur économique recouvrira le coût de la construction de maison à partir de son loyer. 1,5pt
3) Déterminer après combien d'années la vente atteindra son minimum. 1,5pt

BONNE CHANCE