

MINESEC	23 Mars 2022	Epreuve de Mathématiques
Collège Progressif NGOUNOU	Classe : Tle CC	Coefficient : 07
Département de Mathématiques	Devoir surveillé N°5	Durée : 4H

Partie A : Evaluation des ressources (30 points)

Exercice 1 : (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $4 + i$; $4 - i$ et $-i$.

a) Placer ces points dans le repère. 1pt

b) Le point Ω est le point d'affixe 2. Le point D est l'image du point A par la rotation r de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Déterminer l'affixe de D. 1pt

Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{2}$.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $h \circ r$. 1,5pt

b) Déterminer une écriture complexe de $h \circ r$. 1,5pt

Exercice 2 : (6 points)

On considère les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos^2 x \, dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin^2 x \, dx$.

1. Calculer $I + J$ 1pt

2. Soit f la fonction de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{1}{4} e^{2x} (\cos 2x + \sin 2x)$.

2.a) Montrer que f dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$. 1pt

2.b) En déduire $I - J$. 1pt

2.c) Calculer I et J . 1pt

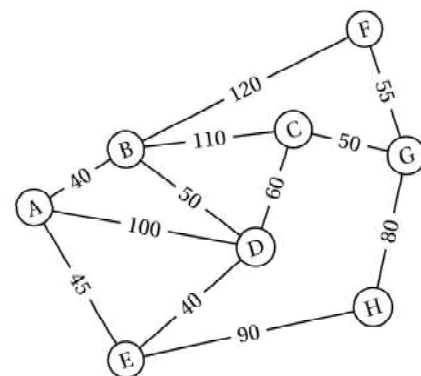
3) On donne $H = \int_0^{\pi} \frac{8}{(1 + \cos t)^2} dt$. Montrer que $\frac{\pi}{8} \leq H \leq \pi(3 - 2\sqrt{2})$. 0,5pt

4.) Calculer la dérivée de la fonction $g: x \mapsto \int_x^{2x} \frac{1}{(1 + \cos t)^2} dt$ 1,5pt

Exercice 3 : (4 points)

Une compagnie aérienne utilise huit aéroports que l'on nomme A, B, C, D, E, F, G et H. Entre certains de ces aéroports, la compagnie propose des vols dans les deux sens. Cette situation est représentée par le graphe (Γ) ci-contre, dans lequel :

- les sommets représentent les aéroports,
- les arêtes représentent les liaisons assurées dans les deux sens par la compagnie.



1. Donner la matrice d'adjacence M de (Γ) en respectant l'ordre alphabétique des sommets. 1pt

2. On donne les matrices M^2 et M^3 ci - contre :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 1 \\ 8 & 4 & 8 & 8 & 3 & 6 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 7 & 6 & 7 & 3 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 4 & 7 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 3 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 1 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer le nombre minimal de vols qu'il doit prendre. (Justifier les réponses à l'aide des matrices données ci - dessus). 1pt

3. Un autre voyageur part de l'aéroport F pour se rendre à l'aéroport E.

En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le trajet le moins cher 2pts

Exercice 4 : (15 points)

A-1 Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x)$.

1. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $g'(x)$ et en son signe. 1,5pt
2. Dresser le tableau de variation de g . Puis en déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$. 2,5pts

B-1 Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{-2x} \ln(1+2e^x)$ et (C) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $OI = 4\text{cm}$ et $OJ = 1\text{cm}$.

1. a) Montrer qu'en posant $t = 1 + 2e^x$, on a $f(x) = \frac{4 \ln t}{(t-1)^2}$. 1pt
 b) Montrer que (C) admet une asymptote à $+\infty$. Calculer la limite de f en $-\infty$. 1,5pt
 d) Montrer que $f'(x) = 2e^{-2x}g(x)$, puis dresser le tableau de variation de f . 2pts
 e) Tracer (C) . 1,5pt
2. Soit h la fonction définie par $h(x) = e^{2x}[\ln(e^x + 2) - x]$ et (C') la courbe de h .
 a) Montrer que $h(x) = f(-x)$. 0,5pt
 b) Tracer (C') . 1,5pt

C-1 Soit α un réel strictement positif

1. vérifier que pour tout réel x , on a : $\frac{e^{-x}}{1+2e^x} = e^{-x} - 2 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+2}$. 1pt
2. Calculer alors $I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{e^{-x}}{1+2e^x} dx$. 1pt
3. Calculer en cm^2 , en fonction de α , et à l'aide d'une intégration par partie l'aire du domaine des points $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ du plan tels que $\begin{cases} 0 \leq x \leq \alpha \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$. 1pt

Partie B : Evaluation des compétences (09 points)

Situation

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm en abscisses et de 4 cm en ordonnées. La figure(1) ci - contre représente un jardine publique délimité par deux rues (R_1) et (R_2) associées respectivement aux courbes (C_1) et (C_2) de deux fonctions

$$f_1: x \mapsto \frac{\ln x}{x} \text{ et } f_2: x \mapsto \frac{(\ln x)^2}{x}.$$

Deux types de récipients sont utilisés dans ce jardin comme pot de fleurs pour rendre l'espace un peu plus naturel. Il s'agit des récipients A et B ci - contre.

- le volume V_A du récipient A est obtenu par la rotation autour de l'axe (OY) d'un morceau de parabole d'équation : $y = x^2$.

- le volume V_B du récipients B est obtenu par la rotation autour de l'axe (OX) du morceau de parabole d'équation : $y = x^2$.

Tâches : Déterminer au 10^{ème} près.

- 1-) L'aire du jardin publique. 3pts
- 2-) le volume V_A du récipient A. 3pts
- 3-) le volume B du récipient B. 3pts

4-) Présentation : 1pt

