COLLÈGE F-X. VOGT		Année scolaire 2021-2022
Département de Mathématiques	MINI-SESSION	Date : 02/02/2022

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Niveau : PC **Durée : 3 heures** **Coefficient: 6**

Partie A : ÉVALUATION DES RESSOURCES (15,5 POINTS)

Exercice 1: (3,5 points)

A/ ABCD est un carré direct de centre I. On désigne par J le milieu du segment [BC], r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

1) a) Déterminer la droite (D) telle que $t = S_{(IJ)} o S_{(D)}$. ***0,5pt***

   b) Déterminer la droite (D') telle que $r = S_{(D')} o S_{(IJ)}$. ***0,5pt***

2) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f telle $f = rot$. ***0,5pt***

B/ Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. Soit (Δ) la droite d'équation $x - 2y + 1 = 0$ et $\vec{u} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$.

1) Déterminer l'expression analytique de la translation t de vecteur $\vec{u}$. ***0,5pt***
2) On désigne par h l'homothétie de centre $A(1; 2)$ et de rapport 2.
   a) Déterminer l'expression analytique de h. ***0,5pt***
   b) Déterminer l'expression analytique de l'application $g = hot$. ***0,5pt***
3) Déterminer l'équation cartésienne de la droite (Δ') image de (Δ) par g. ***0,5pt***

Exercice 2: (3,5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. Soit $\alpha \in]-\pi; \pi]$. On considère les points pondérés $(A; sin\alpha), (B; sin\alpha)$ et $(C; 1)$ avec $A\binom{0}{-2}, B\binom{0}{1}$ et $C\left(\frac{5}{4}; 2\right)$.

1) Pour quelle valeur de α la famille $\{(A; sin\alpha), (B; sin\alpha), (C; 1)\}$ admet-elle un barycentre G ? ***1pt***
2) Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, construire le point G. ***0,5pt***
3) On considère le point $I(0; 4cos^2\alpha)$ du plan. Déterminer les valeurs de α pour les quelles $(AB) \perp (IC)$. ***1pt***
4) Déterminer et construire le lieu géométrique des points M tels que $mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) = -\frac{\pi}{4}$. ***1pt***

Exercice 3 : (2,5 points)

Dans un parc automobile, les véhicules disposent de trois dispositifs de sécurité suivants : ABS, Air Bag et Correcteur de trajectoire. On sait que 7 véhicules ne sont munis d'aucun de ces dispositifs alors que 18 véhicules sont munis des trois dispositifs. Tout véhicule muni d'un correcteur de trajectoire est aussi muni d'au moins un autre dispositif de sécurité. 305 véhicules disposent de deux dispositifs de sécurité au moins. 298 véhicules de l'ABS, 428 disposent d'Air Bag et 122 disposent des deux. Enfin 87 véhiculent disposent de l'ABS et d'un correcteur de trajectoire.

1) Représenter ces données par un diagramme. ***1pt***

2) Quel est le nombre total de véhicules de ce parc ? ***0,5pt***

3) Quel est le nombre de véhicules de ce parc disposant d'un et d'un seul dispositif de sécurité ? ***0,5pt***

4) Quel est le nombre de véhicules de ce parc disposant d'au plus un dispositif de sécurité ? ***0,5pt***

Exercice 4 : (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Unité sur les axes 1 cm.

Soit f la fonction définie sur $D = \mathbb{R} - \{-1\}$ par $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ et (C_f) sa courbe représentative.

1) a) Calculer les limites de f aux bornes de D. En déduire l'équation d'une asymptote à (C_f). ***1,25pt***

   b) Montrer que la droite (d) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à (C_f). ***0,5pt***

2) Montrer que le point $A(-1; -2)$ est centre de symétrie de (C_f). ***0,5pt***

3) Étudier les variations de f est dresser son tableau de variation. ***1pt***

4) Tracer la courbe (C_f). ***1,25pt***

5) Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{x^2}{|x|+1}$ et (C_g) sa courbe représentative.

   a) Déterminer l'ensemble de définition de g, puis étudier sa parité. ***0,75pt***

   b) Tracer sur le graphique précédent, la courbe (C_g). ***0,75pt***

Partie B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES (4,5 POINTS)

Un parc contient deux grands points d'eau A et B distant de 20 km. La frontière du parc est telle que pour tout point M de cette frontière, on a $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 525$. On introduit dans ce parc une population de guépards et on remarque que l'évolution du troupeau introduit en fonction du temps est donnée par $N(t) = -t^4 + 96t^2 + 400$ avec t en années. On établit aussi que la densité des individus au kilomètre carré liée à la distance x (en km) qui sépare le point d'eau A d'un point quelconque du parc est donnée par $D(x) = \frac{3600}{x^2+36}$. On prendra $\pi = 3{,}14$.

Taches :

1) La population de guépards va-t-elle s'éteindre ? Si oui quand ? ***1,5pt***

2) Déterminer la densité maximale de la population de guépards à partir du point d'eau A et sa variation par rapport à un point quelconque du parc. ***1,5pt***

3) Déterminer l'aire de ce parc. ***1,5pt***