Exercice 1

Dans le plan orienté, on considère un triangle rectangle isocèle ABC tel que $mes(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$. I est le milieu de $[BC]$ et O est le milieu de $[AI]$. On désigne par r le quart de tour direct de centre B et r' le quart de tour direct de centre O. t est la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

1. On considère l'application du plan g définie telle que $g = r' \circ t \circ r$.
   (a) Déterminer les images des points I et O par g.
   (b) Déterminer la nature et le(s) élément(s) caractéristique(s) de g.
2. Ecrire O comme barycentre des points A, B et C affectés des coefficients à déterminer.
3. Soit h l'application du plan $\mathcal{P}$ dans lui-même qui à un point $M(x;y)$ associe le point $M'(x;y)$ tel que $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$
   (a) Montrer que h admet un unique point invariant qu'on déterminera.
   (b) Montrer que $M' = h(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = 3\overrightarrow{MO}$.
   (c) Déterminer la nature de h et donner ses éléments caractéristiques.
   (d) Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
   (e) Déterminer la nature de l'application s tel que $s \circ h^{-1} = g$.

Exercice 2

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = a$ et $AC = 2a$. I désigne le milieu de $[AC]$ et G est le barycentre du système $\{(A;3);(B;-2);(C;1)\}$.

1. Construire le point G et préciser la nature du quadrilatère $ABIG$. Exprimer en fonction de a les distances GA, GB et GC.
2. À tout point M du plan, on associe le nombre réel : $f(M) = 3MA^2 - 2MB^2 + MC^2$.
   (a) Exprimer $f(M)$ en fonction de a.
   (b) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) : $f(M) = 2a^2$.
3. Á tout point M du plan, on associe le nombre réel : $h(M) = 3MA^2 - 2MB^2 - MC^2$.
   (a) Démontrer qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul tel que $h(M) = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{u} - 2a^2$.
   On désigne par (Δ) l'ensemble des points M du plan tels que : $h(M) = -2a^2$.
   (b) Vérifier que les points I et B appartiennent à (Δ) et préciser la nature de cet ensemble. Construire (Δ) et (Γ).

Exercice 3

Dans le plan orienté, on considère un triangle rectangle isocèle ABC tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{2}$. I est le milieu de $[BC]$ et O est le milieu de $[AI]$. On désigne par r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$, r' la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

1. On considère l'application g tel que $g = r' \circ t \circ r$.
   (a) Déterminer l'image du point B par g.
   (b) Déterminer la nature les éléments caractéristiques de g.

   Ecrire O comme barycentre des points A, B et C affectés des coefficients à préciser.
2. On définit l'application h du plan dans lui-même qui à tout point M associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.
   (a) Montrer que h admet un unique point invariant que l'on déterminera.
   (b) Déterminer la nature de h et donner ses éléments caractéristiques.

(c) Justifier que $s = g \circ h$ est une similitude dont on précisera l'angle et le rapport.

Exercice 4

ABC est un triangle, H son orthocentre et O le centre du cercle circonscrit à ABC. D est le point diamétralement opposé à A. On fera une figure que l'on complètera au fur et à mesure.

1. Démontrer que $BHCD$ est un parallélogramme.
2. En déduire que le milieu A' de $[BC]$ est le milieu de $[HD]$ et que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$.
3. On désigne par $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au triangle ABC et on pose $(\mathcal{C}') = t_{\overrightarrow{AH}}(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}'') = S_{\overrightarrow{BC}}(\mathcal{C})$.
   (a) Démontrer que $(\mathcal{C}') = (\mathcal{C}'')$.
   (b) En déduire que le symétrique de H par rapport à (BC) est un point de $(\mathcal{C})$.

Exercice 5

$ABCD$ est un carré de sens direct de centre O et ADE est un triangle équilatéral direct extérieur au carré $ABCD$. G est le centre de gravité du triangle ADE. On désigne par r et r' les rotations de centre G telles que $r(A) = D$ et $r'(A) = E$. E est la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ et F le point d'intersection des droites (DG) et (AB).

1. Faire une figure.
2. Donner une mesure des angles r et r'.
3. Donner la nature et les éléments caractéristiques de $r \circ r'$.
4. Déterminer la transformation $S_{(EG)} \circ S_{(AC)}$.
5. Déterminer les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ telles que $r = S_{(\mathcal{D})} \circ S_{(EG)}$ et $t = S_{(EG)} \circ S_{\mathcal{D}'}$.

   En déduire $r \circ t$.

Exercice 6

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$. On donne les points $A(1;-2)$; $B(3;0)$; $C(-2;0)$.

1. Placer les points A, B et C dans le plan.
2. (a) Déterminer et construire l'ensemble (σ) des points M tels que : $MB^2 + MC^2 = 13$.
   (b) Soit $(\Delta) : y = 5x+11$. Montrer que (Δ) est tangente à (Σ) au point C et construire (Δ).
3. Soit $h = h(I, 2)$ l'homothétie de centre I et de rapport -2, où I est le milieu de $[BC]$.
   (a) Placer les points A', B' et C' image de A, B et C par h.
   (b) Soit $r = r\left(I, -\dfrac{\pi}{2}\right)$ la rotation de centre I et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, placer les points A'', B'' et C'' image de A', B' et C' par r.
   (c) On pose $f = r \circ h$, donner la nature de f et ses éléments caractéristiques.
4. Soit (Σ') l'image de (Σ) par f.
   (a) Donner la nature de (Σ') et ses éléments caractéristiques.
   (b) Construire (Σ').
   (c) Construire (Δ') image de (Δ) par f et montrer que (Δ') est tangente à (Σ') au point C''.

Exercice 7

$ABCD$ est un carré de centre O et de sens direct. On note I et L les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AD]$. On pose $f = r \circ h$ où $r = r\left(A; \dfrac{\pi}{4}\right)$ et $h = h\left(A; \dfrac{1}{2}\right)$.

1. Construire les points I' et O' symétriques respectifs des points I et O par rapport à la droite (AD).
2. (a) Déterminer $h(B)$; $h(C)$ et $h(D)$.
   (b) Déterminer $r(I)$; $r(O)$ et $r(L)$.
   (c) En déduire $f(B)$; $f(C)$ et $f(D)$.
3. Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'application f.
4. En déduire que les droites (BD) et (LI') sont perpendiculaires.

Exercice 8

$ABCDEF$ est un hexagone régulier de sens direct inscrit dans un cercle de centre O et de rayon $4cm$. On note $G = bar\{(A;1);(B;-1);(C;2)\}$ et K le point d'intersection des droites (BG) et (AC).

1. Faire une figure soignée.
2. Etablir que G est le milieu de $[OC]$.
3. Déterminer le nombre réel λ tel que $\lambda\overline{KA} = \overline{KC}$.
4. Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 + 2MC^2 = 80$.

   Justifier que $A \in (\Gamma)$, puis déterminer et construire (Γ).

Exercice 9

ABC est un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 3$ et $BC = 5$.

1. À tout point M du plan, l'application f du plan dans lui même associe le point M', barycentre des points $(A,2)$, $(B,-3)$, $(C,1)$ et $(M,2)$.
   (a) Construire les images respectives A', B' et C' des points A, B et C par f.
   (b) L'application f admet-elle un point invariant ?
   (c) Déterminer avec la nature de f.
2. À tout point M du plan, l'application g du plan dans lui-même associe le point M' tel que $\overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{M'B} - \overrightarrow{M'C} + \overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{0}$.
   (a) Montrer que g admet un point invariant D. placer-le.
   (b) Montrer que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{DM'}$ et $\overrightarrow{DM}$ sont colinéaires.
   (c) Donner la nature précise de g.
3. Montrer qu'il existe un unique point E ayant la même image par f et par g. Placer-le.
4. Déterminer la nature et éléments caractéristiques de $g^{-1} \circ f$ et $f^{-1} \circ g$.

Exercice 10

Dans le plan, on considère un triangle isocèle ABC tel que $AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{4}$. Soit I le point tel que le triangle CAI soit isocèle rectangle avec $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CI}) = -\dfrac{\pi}{2}$.

1. Faire une figure, que l'on complètera au fur et à mesure. On prendra $AB = 5cm$.
2. Soit r_A la rotation de centre A qui transforme B en C et r_C la rotation de centre C et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$. On pose $f = r_C \circ r_A$.
   (a) Déterminer $f(A)$ et $f(B)$.
   (b) Démontrer que f est une rotation dont on précisera l'angle et le centre O.
   (c) Quelle est la nature du quadrilatère $ABOC$?
3. Soit s la similitude directe de centre O qui transforme A en B. On appelle C' l'image de C par s, H le milieu de $[BC]$ et H' son image par s
   (a) Donner une mesure de l'angle de s.
   (b) Montrer que $C' \in (OA)$.
   (c) Donner l'image par s du segment $[OA]$ et montrer que H' est le milieu de $[OB]$.
   (d) Montrer que $(C'H') \perp (OB)$.
   (e) En déduire que C' est le centre du cercle circonscrit au triangle OBC.

Exercice 11

ABC est un triangle rectangle en A. H est le pied de la hauteur issue de A. I et J sont les projetés orthogonaux de H sur les droites (AB) et (AC). (AH) et (IJ) se coupent en O.

1. Quelle est la nature du quadrilatère $AIHJ$? La parallèle à (IJ) passant par A coupe (HI) en P et (HJ) en Q. Soit h l'homothétie de centre H qui transforme J en Q.
2. Quelle est l'image de (IJ) par h ?
3. Déterminer $h(I)$ et montrer que $h(O) = A$.
4. Quel est le rapport de l'homothétie de h ?
5. En déduire que I et J sont les milieux respectifs de $[PH]$ et $[HQ]$.