

# EXERCICES SUR LA FONCTION LOGARITHME

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

## EXERCICE 1 :

1°) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

- a)  $\ln(x-2) + \ln(x+1) = \ln(3x-5)$  ;  $\ln(2x-5) = 0$ .  
b)  $2\ln(x-2) + \ln(3x+1) = 2\ln 2$  ;  $\ln(x+2) + \ln(x-2) = \ln 5 + 2\ln 3$ .  
c)  $\ln|x+1| + \ln|x-5| = \ln 16$  ;  $\ln|6-x| = 1$ .  
d)  $\ln(-x-1) = \ln\left(\frac{-x-10}{x+2}\right)$  ;  $\ln x - \frac{1}{\ln x} = \frac{15}{4}$ .  
e)  $6\ln^2 x + 7\ln x - 3 = 0$  ;  $\ln^3 x - 2\ln^2 x - \ln x + 2 = 0$ .  
f)  $2\ln(2x-1) - \ln(3x-2x^2) = \ln\left(\frac{4x-3}{x}\right)$  ;  $\ln(x+2) + 1 = \ln(x-1) + \ln 2$ .  
g)  $2\ln x = \ln 2 + \ln(2 + \sqrt{2}) + \ln(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}) + \ln(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}})$ .

- h)  $(\ln x)^2 - 7\ln x + 6 = 0$  ;  $2(\ln x)^2 - 3\ln x + 1 = 0$ .  
i)  $\log x + \log(3-x) = \log 5$  ;  $\log_3^{\sqrt{x}} + \frac{1}{2} + \log_9^{(4x+15)} = 0$

2°) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

- a)  $\ln(x^2 - 10x + 9) \geq \ln(3x - 27)$  ;  $\ln[x(3-x)] \leq \ln 2$   
b)  $\ln(5x^2 + 6x + 1) > 0$  ;  $2(\ln 2x)^2 - 5\ln 2x - 3 \leq 0$   
c)  $\ln\left(\frac{2x-3}{5x+1}\right) \leq 0$  ;  $\ln(x+5) + \ln(x+4) \leq \ln(x+13)$   
d)  $\ln x + \ln(2-x) + \ln(x+4) \geq \ln(5x)$  ;  $\ln^2 x + 2\ln x - 15 < 0$   
e)  $\ln x - \frac{1}{\ln x} < \frac{8}{3}$  ;  $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln 3x$ .

3°) Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  les systèmes suivants :

- a)  $\begin{cases} x + y = 65 \\ \ln x + \ln y = 6\ln 2 \end{cases}$  ;  $\begin{cases} 2\ln x - 3\ln y = 9 \\ \ln x + 5\ln y = -2 \end{cases}$  ;  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ \ln x + \ln y = 2\ln 2 + \ln 3 \end{cases}$  ;  $\begin{cases} \ln(x^3 y^4) = 6 \\ \ln\left(\frac{x^2}{y^5}\right) = 5 \end{cases}$
- b)  $\begin{cases} \ln y = \ln x + 2 \\ xy = 9e^2 \end{cases}$  ;  $\begin{cases} \ln x^3 + \ln y^2 = 3 \\ \ln y^2 - \ln x^2 = -2 \end{cases}$  ;  $\begin{cases} \ln x^3 - \ln y^2 = -4 \\ \ln x + \ln y^4 - 1 = 0 \end{cases}$  ;  $\begin{cases} x + y = 7 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$
- c)  $\begin{cases} x + y = 29 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$  ;  $\begin{cases} x + y = 4e \\ \log x + \log y = 2 + \ln 3 \end{cases}$  ;  $\begin{cases} xy = 243 \\ \log_x y + \log_y x = \frac{17}{4} \end{cases}$  ;  $\begin{cases} xy = 256 \\ \log_x^x y + \log_y^y x = \frac{50}{7} \end{cases}$
- d)  $\begin{cases} \ln(x-2) + 3\ln(y-1) = 0 \\ 2\ln(x-2) - \ln(y-1) = 4 \end{cases}$  ;  $\begin{cases} \ln(\sin x) + \ln(\cos x) = \ln\sqrt{3} - \ln 4 \\ 2(\sin x + \cos x) = \sqrt{3} + 1 \end{cases}$  ;  $\begin{cases} \ln\left(\frac{x}{y^3}\right) = 9 \\ \ln(x^5 y) = \frac{-17}{2} \end{cases}$  ;  $\begin{cases} 2^{x+1} - 3\log_2^y = -11 \\ 2^{x+2} + 7\log_2^y = 43 \end{cases}$

## EXERCICE 2

1° Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 2x}$

2° Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

a)  $f(x) = 2x + 1 + \ln(3x - 12)$  ; b)  $f(x) = x^2 \ln(-x^2 + 6x - 5)$  ; c)  $g(x) = \ln(3x - 6) + \ln(x + 4)$

d)  $g(x) = x \ln\left(\frac{x+2}{1-x}\right)$  ; e)  $g(x) = x + 1 + \ln\left(\frac{2x-4}{-x+5}\right)$  ; f)  $g(x) = \ln|-3x+12|$  ; g)  $g(x) = \ln|x^2 - 16|$

h)  $p(x) = \ln|-x^2 - 3x + 4|$  ; i)  $q(x) = -3x + 1 + \ln\left|\frac{x+3}{-x+5}\right|$  ; j)  $r(x) = x^2 - 3 + \ln|3x - 21|$ .

k)  $S(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$  ; L)  $T(x) = 3x + 2 - \ln(\sqrt{-x^2 + 3x - 2})$  ; m)  $u(x) = \sqrt{3 - \ln x}$

n)  $v(x) = \frac{x-5}{\ln^2 x - 4 \ln x + 3}$  ; o)  $i(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 5x + 6}{-x^2 + 7x + 8}\right)$  ; p)  $\begin{cases} f(x) = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x} \\ f(0) = -1 \end{cases}$

q)  $\begin{cases} f(x) = x \ln(3 - \ln x) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$  ; r)  $g(x) = \frac{\ln(x^2 - 5x + 4)}{\ln(x^2 + 7x + 10)}$  ; s)  $h(x) = \ln(x^2 - 1) - \ln(2x^2 - 8)$ .

3° Soient les fonctions  $f : x \mapsto f(x) = \ln x$  et  $g : x \mapsto g(x) = \ln(x + 2) + 1$ .

a) Ecrire  $g(x)$  en fonction de  $f(x)$ .

b) Déterminer les ensembles de définition de  $f$  et de  $g$ .

c) à partir du tableau de variation de  $f$  déduire celle de  $g$ .

## EXERCICE 3 :

**A)** On considère la fonction  $g$  définie par  $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$ .

1° Etudier les variations de  $g$ .

2° Calculer  $g(1)$  et en déduire le signe de  $g(x)$ .

**B)** On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = -x + 3 + \frac{\ln x}{x}$ .

1° Etudier les variations de  $f$ .

2° Démontrer que la courbe  $(Cf)$  admet la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = -x + 3$  comme asymptote oblique. Etudier la position de  $(Cf)$  par rapport à  $(\Delta)$ .

3° Déterminer les coordonnées du point A de  $(Cf)$  où la tangente  $(T)$  à  $(Cf)$  est parallèle à  $(\Delta)$ . Donner une équation de cette tangente.

4° Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha \in ]0 ; 1]$ ; puis une solution unique  $\beta$  dans  $[3 ; 4]$ .

5° Tracer  $(Cf)$  et  $(\Delta)$  dans un repère orthonormé d'unité 1cm.

6° Déterminer l'aire  $A$  de la région du plan limitée par  $(Cf)$  ; la droite  $(\Delta)$  et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = 3$ .

### EXERCICE 4 :

Soit la fonction numérique  $f$  définie par  $f(x) = x + \ln|x|$

1°) Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ . Ecrire  $f(x)$  sans valeur absolue.

Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de  $Df$ .

2°) Calculer  $f(-1)$  et  $f(1)$  ; étudier le sens de variation de  $f$  puis dresser son tableau de variation.

3°) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de  $(Cf)$  avec la droite  $(\mathcal{D})$  d'équation  $y = x$ .

4°) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha \in ]0 ; 1]$ .

5°) En déduire le signe de  $f(x)$  dans  $Df$ .

6°) Tracer sa courbe représentative  $(Cf)$  dans un repère orthonormé d'unité graphique 2cm.

7°) Déterminer en  $\text{cm}^2$  l'aire  $\mathcal{A}$  de la région du plan limitée par  $(Cf)$  ; la droite  $(\mathcal{D})$  et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e$ .

### EXERCICE 5 :

Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = 1 + x - 3x \ln x$ .

1°) Peut-on prolonger  $f$  par continuité au point  $x_0 = 0$  ? Si oui déterminer son prolongement  $g$ .

2°) Déterminer l'intervalle  $I$  de définition de  $g$ .

3°) Etudier la continuité et la dérivabilité de  $g$  au point  $x_0 = 0$ .

4°) a) Etudier le sens de variation de  $g$  puis dresser son tableau de variation.

b) Montrer que dans  $[1 ; 2]$   $g(x) = 0$  admet une solution et une seule  $\alpha$ .

5°) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$  puis interpréter.

6°) Tracer la courbe représentative de  $g$  dans un repère orthonormé d'unité 1cm.

### EXERCICE 6 :

I) Soit  $f$  l'application de  $] -1 ; 5]$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :  $f(x) = x + 1 - \ln(x + 1)$ .

On désigne par  $(Cf)$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité 2cm.

1°) Etudier le sens de variation de  $f$  et la limite de  $f$  quand  $x$  tend vers  $(-1)$ .

Donner le tableau de variation de  $f$ .

2°) a) Calculer les images par  $f$  des réels : 0,5 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5. En donner une valeur approchée à 0,1 près.

b) Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à  $(Cf)$  au point d'abscisse :  $\frac{-1}{2}$ .

3°) Construire  $(T)$  et  $(Cf)$ .

II) – On appelle  $D$  l'ensemble des points du plan dont les coordonnées  $x$  et  $y$  vérifient :

$$0 \leq x \leq 5 \quad ; \quad 1 \leq y \leq f(x).$$

A] 1°)  $f'$  désigne la fonction dérivée de  $f$ .

a) Etudier le sens de variation de  $f'$  et donner son tableau de variation.

b) En déduire, pour  $x \in [0 ; 5] : 0 \leq f'(x) \leq \frac{5}{6}$ .

2°) En appliquant l'inégalité des accroissements finis au segment  $[0 ; x]$ ,  
établir que :  $1 \leq f(x) \leq \frac{5}{6}x + 1$ .

3°) a) Tracer la droite d'équation :  $y = \frac{5}{6}x + 1$ .

b) Déduire de ce qui précède une majoration de l'aire de D.

**B]** On appelle  $\mathcal{A}$  l'aire de D, en  $\text{cm}^2$ .

1°) Exprimer  $\mathcal{A}$  à l'aide d'une intégrale.

2°) Donner la dérivée de la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = (x+1)\ln(x+1)$ .

En déduire  $K = \int_0^5 \ln(x+1)dx$ .

3°) Calculer  $\mathcal{A}$  ; en donner une valeur approchée à  $1 \text{ cm}^2$  près par défaut.

### EXERCICE 7 :

**A]** Soit  $g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$ .

1°) Etudier la fonction  $g$  ;

2°) a) Calculer  $g(1)$  ;

b) En utilisant le tableau de variation de  $g$ , déduire que :  $g(x) > 0 \quad \forall x \in ]0;1[$

**B]** Soit  $f(x) = \frac{-1}{2}x + 3 + \frac{\ln x}{2x}$

1°) a) Préciser l'ensemble de définition  $Df$  de  $f$ .

b) Etudier les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.

c) Calculer  $f'(x)$  et montrer que pour tout  $x$  de  $Df$  :  $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$ .

d) En déduire le signe de  $f'(x)$  puis dresser le tableau de variation de  $f$ .

2°) Soit  $(Cf)$  la courbe de  $f$  dans le plan rapporté au repère orthonormé d'unité graphique 2 cm. Soit D la droite d'équation :  $y = -\frac{1}{2}x + 3$ .

a) Donner suivant les valeurs de  $x$  le signe de  $h(x) = f(x) - (-\frac{1}{2}x + 3)$  et en déduire la position de  $(Cf)$  par rapport à D.

b) Soient respectivement M et N les points de même abscisse  $x$  de  $(Cf)$  et D. Calculer la distance MN en fonction de  $x$ . Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ .

c) Construire  $(Cf)$  et D.

3°) a) Calculer la dérivée de la fonction  $U$  définie par  $U(x) = (\ln x)^2$

b) En déduire l'aire A du domaine plan limité par  $(Cf)$  la droite D et les droites d'équations :  $x = 1$  ;  $x = e^2$ .

## EXERCICE 8:

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  par 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Soit  $(Cf)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$  (Unité graphique : 2 cm).

1°) a) Prouver que pour tout réel  $t \geq 0$  on a :  $1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$ .

b) En déduire que  $\forall x > 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$  (1).

2°) Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  par  $g(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x}$

a) Calculer  $g'(x)$

b) Prouver que pour tout nombre réel  $x \geq 0 : 0 \leq g'(x) \leq \frac{x^2}{4}$

c) En déduire que pour tout nombre réel  $x \geq 0 : 0 \leq g(x) \leq \frac{x^3}{12}$  (2).

3°) Etude des variations de  $f$ .

a) Calculer  $f'(x)$  pour  $x > 0$ .

b) Etablir que pour  $x \geq 0$  on a :  $g(x) \leq \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$ .

Grâce à (2) établir le sens de variation de  $f$ .

4°) a) Déterminer la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

b) à l'aide de (2) montrer que pour  $x \geq 0$  on a :

$$x - \frac{x^3}{12} - \frac{2x}{2+x} \leq x - \ln(1+x) \leq x - \frac{2x}{2+x}, \text{ puis } \frac{1}{2+x} - \frac{x}{12} \leq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{x+2}.$$

c) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$  et en déduire que  $f'(0) = \frac{-1}{2}$ .

d) Soit  $T$  la tangente à  $(Cf)$  en  $x_0 = 0$ .

En utilisant (1) montrer que  $(Cf)$  est au-dessus de  $T$  pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .

5°) Dresser le tableau de variation de  $f$ . Tracer  $(Cf)$  et  $T$  dans le même repère.

## EXERCICE 9:

**Partie A :** On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :  $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2 + 1}$ .

1°) a) Calculer la dérivée  $g'$  de  $g$ . Montrer que pour tout  $x \in ]0 ; +\infty[$ ,  $g'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x(x^2 + 1)^2}$ .

b) Etudier le signe de  $g'(x)$  selon les valeurs de  $x$ .

2°) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  puis  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ .

3°) a) Dresser le tableau de variation de  $g$ .

b) En déduire qu'il existe un unique nombre réel  $\alpha > 0$  tel que  $g(\alpha) = 0$ .

Vérifier que  $0,5 < \alpha < 0,6$ .

4°) Déduire des questions précédentes le signe de  $g(x)$  sur  $]0 ; +\infty[$ .

**Partie B :** On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :

$$\begin{cases} f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note  $(Cf)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 5cm.

1°) a) Montrer que pour tout  $x \in ]0 ; +\infty[$ , on a  $f'(x) = g(x)$ .

b) En déduire les variations de  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$ .

2°) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf'(x)$ ; en déduire que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

3°) a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 0$ .

b) Etudier la dérivabilité de  $f$  en 0.

Préciser la tangente à la courbe  $(Cf)$  en  $x=0$ .

4°) a) Prouver que, pour tout élément  $x$  de  $[0,5 ; \alpha]$  ;  $0 \leq f'(x) \leq f'(0,5)$ .

b) En déduire que, pour tout élément  $x$  de  $[0,5 ; \alpha]$  :

$$0 \leq f(\alpha) - f(0,5) \leq (\alpha - 0,5) f'(0,5) \quad \text{puis que} \quad 0 \leq f(\alpha) - f(0,5) \leq \frac{1}{10} f'(0,5).$$

d) En déduire une valeur approchée de  $f(\alpha)$  à  $10^{-3}$  près.

5°) Dresser le tableau de variations de  $f$ . Tracer la courbe de  $f$ .

6°) Déterminer l'aire du domaine plan limité par la courbe de  $f$ , l'axe des abscisses, les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 1$ .

## EXERCICE 10:

**Partie A :** On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :

$$g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x$$

1°) Etudier le sens de variations de  $g$ .

2°) a) Calculer  $g(1)$  et  $g(2)$ . Montrer que l'équation  $g(x)=0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $]0 ; +\infty[$ .

b) Trouver un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-1}$ .

3°) Déduire le signe de  $g(x)$  sur  $]0 ; +\infty[$ .

**Partie B :** On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2 + x}$$

On appelle  $(Cf)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthogonal d'unité Graphique 2 cm.

1°) Etudier les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$  puis interpréter graphiquement ces limites.

2°) a) Montrer que, pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} \times g(x)$ .

b) En déduire les variations de  $f$ .

c) Montrer que,  $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$  et donner le tableau de variation de  $f$ .

3°) Construire la courbe  $(Cf)$  de  $f$ .

**Partie C :** On se propose de trouver un encadrement de l'aire  $A$  de l'ensemble des

points  $M(x ; y)$  tels que 
$$\begin{cases} 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

1°) Montrer que, pour tout  $x \geq 1$  :  $\frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$ .

2°) a) Calculer  $I = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x} dx$  ;

b) En utilisant une intégration par parties, calculer  $J = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x^2} dx$ .

3°) a) Déduire un encadrement de  $K = \int_1^{\frac{3}{2}} f(x) dx$ .

b) Exprimer  $A$  en fonction de  $K$ , puis déduire une valeur approchée de  $A$  en  $\text{cm}^2$ .

## EXERCICE 11:

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{\ln x}{x - \ln x}$ .

1°) Après avoir montré que, pour tout  $x$  réel  $x \neq \ln x$ , préciser l'ensemble de définition de la fonction  $f$ . Déterminer la limite de  $\frac{f(x)}{x-1}$  lorsque  $x$  tend vers 1.

2°) Etudier les variations de cette fonction en précisant éventuellement les asymptotes.

3°) Construire la représentation graphique des variations de la fonction  $f$  dans le plan rapporté à un repère. (On donnera l'équation de la tangente au point d'abscisse  $x = 1$ ).

## EXERCICE 12:

Soit la fonction  $P$  définie par  $P(x) = (1 + \frac{1}{x}) \ln(1+x)$ .

1°)  $h$  désigne la fonction numérique définie par :  $h(x) = x - \ln(1+x)$ .

Etudier le sens de variation de  $h$  et le signe de  $h(x)$ .

2°) Quelle est l'ensemble de définition de  $P$  noté  $D_p$  ?

Calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow -1} P(x)$ .

On désigne par  $F$  l'application de  $D_p \cup \{-1\}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\begin{cases} F(-1) = 0 \\ F(x) = P(x) \text{ pour } x \in D_p \end{cases}$$

Etudier la dérivabilité de  $F$  en  $x = -1$ .

3°) Quelle est la limite de  $P(x)$  quand  $x$  tend vers 0 ?

On désigne par  $f$  l'application de  $D_p \cup \{-1\}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = F(x) \end{cases} \text{ Pour } x \in D_p \cup \{0; -1\} ;$$

4°) Etudier les variations de  $f$  en utilisant en particulier la question 1°).

Construire la courbe représentative de  $f$ .

### **EXERCICE 13:**

1°) a) Etudier les variations de la fonction  $f$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{x(x+2)}{2(x+1)} - \ln(1+x)$$

b) Étudier les variations de la fonction  $g$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par :

$$g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{x+1}.$$

c) Dédire des questions précédentes que, pour tout nombre réel  $x$  strictement positif,

$$\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < \frac{x(x+2)}{2(x+1)} \quad (1)$$

d) Démontrer que pour tout  $x > 0$ ,  $\frac{x(x+2)}{2(x+1)} < x$ . (2).

2°) a) Dédire de (1) et (2) que pour tout  $y > 0$ ,

$$\frac{1}{1+y} < \ln\left(1 + \frac{1}{y}\right) < \frac{1}{y}.$$

b) Dédire de (1) et (2) que pour tout  $z > 0$ ,

$$\frac{z-1}{z} < \ln z < z-1.$$

3°) Utiliser l'un de ces encadrements pour encadrer  $\ln a$  dans chaque cas suivant :

$$a = 0,5 \quad ; \quad a = 0,8 \quad ; \quad a = 0,98 \quad ; \quad a = 1,02 \quad ; \quad a = 1,5.$$

### **EXERCICE 14:**

Le but de ce problème est d'étudier la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{1}{x}(x^2 + 1 - \ln x) \text{ et construire sa courbe représentative } Cf \text{ dans le plan muni d'un}$$

repère orthonormé d'unité graphique : 2 cm.

1°) Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :  $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$ .

a) Etudier le sens de variation de  $g$  et ses limites en 0 et en  $+\infty$ .

b) En déduire que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution  $\alpha$  et une seule et que  $1,30 \leq \alpha \leq 1,35$ .

c) Etudier le signe de  $g(x)$ .

2°) a) Etudier les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .

b) Exprimer  $f'(x)$  à l'aide de  $g(x)$ . En déduire le sens de variation de  $f$ .

3°) a) Montrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$  est asymptote en  $+\infty$  à la courbe  $Cf$ .

b) Déterminer le point d'intersection A de  $Cf$  et  $(\Delta)$  ; préciser la position de  $Cf$  par rapport à la droite  $(\Delta)$ .

c) Construire la courbe  $Cf$  et la droite  $(\Delta)$ , en précisant la tangente en A à  $Cf$ .

## EXERCICE 15:

**A)** Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln|x|$

- 1) Étudier les variations de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}^*$ . Préciser la valeur de l'extremum relatif de  $g$ .
- 2) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha \in \left[ \frac{1}{2} ; 1 \right]$ .
- 3) Donner un encadrement  $\alpha$  de par deux nombres rationnels de la forme  $\frac{n}{10}$  et  $\frac{n+1}{10}$  avec  $n$  entier naturel.
- 4) En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $\mathbb{R}^*$ .

**B)** Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $f(x) = 2x - \frac{\ln|x|}{x^2}$ . Soit  $(Cf)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .

- 1) Étudier les limites de  $f$  en  $-\infty$  ; en  $0$  et en  $+\infty$ .
- 2) Calculer  $f'(x)$  puis en déduire le tableau de variation de  $f$ .
- 3) Démontrer que  $f(\alpha) = 3\alpha - \frac{1}{2\alpha^2}$ .
- 4) En utilisant l'encadrement de  $\alpha$  trouvé au A) 3°) montrer que :  
$$1,6 < f(\alpha) < 2,1.$$

**C)** soit les points  $M(x ; y)$  et  $M'(x' ; y')$  dans le repère  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$  où  $M'$  est le symétrique de  $M$  par rapport à l'axe des ordonnées.

- 1) Déterminer  $x'$  et  $y'$  en fonction de  $x$  et  $y$ .
- 2) Démontrer qu'une équation de la courbe  $(\Gamma)$  à laquelle appartient  $M'$  lorsque  $M$  décrit la courbe  $(Cf)$  est la suivante :  $y = -2x - \frac{\ln|x|}{x^2}$ .
- 3) Étudier la position relative de  $(\Gamma)$  par rapport à  $(Cf)$ .

**D)** On considère un réel  $m$  supérieur à 1.

Soit  $h$  la fonction définie sur  $[1; +\infty[$  par  $h(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ .

- 1) Démontrer que  $H$  définie sur  $[1; +\infty[$  par  $H(x) = -\frac{1 + \ln x}{x}$  est une primitive de  $h$ .
- 2) On désigne par  $A(m)$  l'intégrale  $\int_1^m [2x - f(x)] dx$ . Calculer  $A(m)$ .
- 3) Déterminer si elle existe la limite de  $A(m)$  quand  $m$  tend vers  $+\infty$ .

## EXERCICE 16:

Soit la fonction numérique  $f$  de la variable réelle  $x$  définie par :

$$f(x) = 2x + 1 + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$$

- 1) Etudier les limites de cette fonction aux bornes de son ensemble de définition. On appelle  $(Cf)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé. Préciser les asymptotes à la courbe  $(Cf)$  de  $f$ . En particulier on établira l'existence d'une asymptote oblique ( $\mathcal{D}$ ).
- 2) Etudier le sens de variation de  $f$  puis dresser son tableau de variation.
- 3) Etudier la position relative de  $(Cf)$  par rapport à ( $\mathcal{D}$ ).
- 4) Construire la courbe de  $f$ .

## EXERCICE 17:

A/– Soit la fonction numérique  $f$  de la variable réelle  $x$  définie par :

$$f(x) = \ln |x^2 - 2x - 3|$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Ecrire  $f(x)$  sans valeur absolue puis calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
3. Etudier le sens de variation de  $f$  puis dresser son tableau de variation.
4. Montrer que la droite d'équation  $x = 1$  est axe de symétrie de la courbe de  $f$ .
5. Tracer la courbe représentative  $(Cf)$  de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité 1 cm.

B/– Soit la fonction numérique  $f$  de la variable réelle  $x$  définie par :

$$f(x) = x(\ln x)^2 \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

1. Etudier le signe de  $f'(x)$
2. Montrer que  $f$  n'est pas dérivable en 0.
3. Quelle est la demi tangente en  $x_0 = 0$  ?
4. Donner l'équation de la tangente (T) en  $x_0 = e$ .
5. Tracer la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  de  $f$ .
6. Soit  $g$  la fonction définie par  $g(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x(\ln x - 1)$ .
  - a) Calculer  $g'(x)$  et en déduire une primitive de  $f$ .
  - b) Calculer l'aire  $A(\lambda)$  de la portion du plan comprise entre  $(\mathcal{C}_f)$  l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = \lambda$  ( $0 < \lambda < 1$ ) ;  $x = 1$ .
7. Calculer  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda)$ .

## EXERCICE 18:

Pour  $m$  réel on considère la famille de fonctions  $f_m$  définie par

$$f_m(x) = x + \ln \sqrt{x^2 + mx + 1}$$

1. pour  $m = 2$  étudier les variations de  $f_m$
2. Déterminer l'ensemble des valeurs de  $m$ , noté  $V_m$  pour que  $f_m$  soit définie sur  $\mathbb{R}$ .
3. Montrer que les courbes  $(C_m)$  des fonctions  $f_m$  passent par un point fixe A dont on déterminera les coordonnées.
4. Pour  $m = 0$ , on considère la fonction  $f_0$ 
  - a) Etudier les variations de la fonction  $f_0$ .
  - b) Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f_0$  sur son ensemble de définition.
5. a) Montrer que la courbe  $(C_0)$  de  $f_0$  admet deux points d'inflexion dont on donnera leurs coordonnées.  
b) Etudier les branches infinies de  $(C_0)$  ;  
c) Tracer la courbe  $(C_0)$  dans le plan muni d'un orthonormé.
6. Soit la fonction F définie par :  $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \ln(x^2 + 1)$ 
  - a) Quel est son domaine de définition ?
  - b) Montrer que l'on a :  $F'(x) = f_0(x) + \frac{x^2}{x^2 + 1}$  ;
  - c) Soit h une primitive de la fonction u telle que :  $U(x) = \frac{1}{1+x^2}$  vérifiant  $h'(x) = U(x)$  et  $h(0) = 0$  ;  $h(1) = \frac{11}{4}$ . En déduire une primitive de la fonction  $f_0$   
  
(On montrera que :  $F'(x) = f_0(x) + 1 - U(x)$  ). Calculer en  $\text{cm}^2$  l'aire de la portion du plan limitée par la courbe  $(C_0)$  l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 1$ .
7. Pour  $m \in V_m$ , on considère la droite  $(D_m)$  d'équation  $y = x + m$ .
  - a) Montrer que pour tout  $m$  de  $V_m$  et  $m > 0$  l'intersection de  $(C_m)$  et  $(D_m)$  contient toujours deux points dont on donnera les coordonnées ; on les notera  $M_m$  et  $M'_m$ .
  - b) Montrer que les points  $M_m$  et  $M'_m$  sont symétriques par rapport à un point  $I_m$
  - c) Que se passe-t-il si on fait tendre  $m$  vers 0 ?

## EXERCICE 19:

### Partie A :

On considère la fonction  $f$  définie sur  $] -1; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x)$ .

1. Etudier les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition ;
2. Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.
3. Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet dans  $]1; +\infty[$  une solution unique  $\alpha$ . Vérifier qu'une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-1}$  près par défaut est 3,9.
4. Préciser suivant les valeurs de  $x$ , le signe de  $f(x)$ .

### Partie B :

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(0) = 0$  et  $g(t) = \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}}$  si  $t > 0$ .

1. Etudier la continuité puis la dérivabilité de  $g$  au point  $t = 0$ .
2. Montrer que pour tout réel  $t$  strictement positif on a :  $g'(t) = \frac{1}{2t\sqrt{t}} f(t)$ .
3. a) Calculer la limite de  $g$  en  $+\infty$ .  
b) Dresser le tableau de variation de  $g$ .
4. Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

On prendra pour unités : 1cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées. Construire la courbe  $(\Gamma)$  de  $g$ .

### Partie C :

Cette partie a pour objectif de déterminer l'aire  $A$ , en unités d'aire, du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe  $(\Gamma)$  et la droite d'équation :  $x = 1$ .

1. a) Démontrer que la fonction  $g_1$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $g_1(x) = \sqrt{x} \ln(1+x)$  est dérivable en 0.

b) Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $\varphi(x) = 2\sqrt{x} \ln(1+x) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$ .

Montrer que  $\varphi$  est dérivable en tout point de l'intervalle  $[0; +\infty[$  et que  $\varphi'(x) = g(x)$ .

2. Déduisez des questions précédentes que :  $A = 2 \ln 2 - \int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$

et  $K$  la fonction définie sur l'intervalle  $I = \left[ 0; \frac{\pi}{2} \right]$  par :  $K(\theta) = \tan^2 \theta$  et

$$h : x \mapsto \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt.$$

- a) Calculer  $(h \circ k)(\theta)$  ;
  - b) Prouver que, pour tout  $\theta \in I$ ,  $(h \circ k)'(\theta) = 4 \tan^2 \theta$ .
  - c) Ecrivez  $\tan^2 \theta$  sous la forme  $(\tan^2 \theta + 1) - 1$  puis déterminer une primitive de  $(h \circ k)'$ . Donner l'expression de  $(h \circ k)$ .
  - d) Calculer  $h(1)$ .
4. Déduisez des résultats précédents la valeur exacte de  $A$ .

## EXERCICE 20:

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés des fonctions  $f_n$  ;  $n \in \mathbb{N}^*$  définies sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par :  $f_n(x) = x - n - \frac{n \ln x}{x}$ . La courbe représentative de  $f_n$  dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité 2cm est notée  $(C_n)$ .

### A) Etude des variations de $f_n$ ; $n \in \mathbb{N}^*$ .

1°) Soit, pour tout entier naturel non nul  $n$ , la fonction  $g_n$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par

$$g_n(x) = x^2 - n + n \ln x.$$

a) Etudier le sens de variation de  $g_n$  et préciser ses limites en 0 et en  $+\infty$ .

b) Montrer que l'équation  $g_n(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha_n$  ; et que  $\alpha_n$  appartient à  $[1 ; 3]$ .

2°) a) Etablir que, pour  $x \in ]0 ; +\infty[$  :  $f_n'(x) = \frac{g_n(x)}{x^2}$ .

b) Déterminer le signe de  $g_n(x)$  et en déduire le sens de variation de  $f_n$ .

3°) a) Déterminer les limites de  $f_n$  en 0 et en  $+\infty$ .

b) Montrer que la droite  $(D_n)$ , d'équation  $y = x - n$  est asymptote à la courbe  $(C_n)$ , puis étudier la position de  $(C_n)$  par rapport à  $(D_n)$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .

### B) Etude des cas particuliers $n = 1$ et $n = 2$ .

1°)  $\alpha_n$  étant le nombre définie en A) 1°) montrer que :

▪ Pour  $n = 1$ ,  $\alpha_1 = 1$  ; Pour  $n = 2$  ;  $1,2 < \alpha_2 < 1,3$ .

2°) En utilisant les règles sur les inégalités et l'encadrement de  $\alpha_2$  ci-dessus montrer que  $f_2(\alpha_2) \geq -1,24$ . En utilisant le sens de variation de  $f_2$ , montrer que  $f_2(\alpha_2) \leq -1,10$ .

3°) Donner les tableaux de variations de  $f_1$  et de  $f_2$ .

4°) Représenter dans le même repère les droites  $(D_1)$  et  $(D_2)$  puis les courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$ .

### C) Etude des positions relatives des courbes $(C_n)$ .

1°) Pour tout entier naturel  $n$ , et pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ , calculer la différence  $f_n(x) - f_{n+1}(x)$ .

Calculer la limite de cette différence lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

2°) Soit  $d$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $d(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$ .

a) Etudier les variations de  $d$ , préciser ses limites en 0 et en  $+\infty$ .

b) Déduire de la question précédente que l'équation  $d(x) = 0$  admet une solution unique  $\beta$  et que  $\beta$  appartient à l'intervalle  $]0 ; 1[$ .

c) Montrer que, pour tout entier naturel non nul, on a  $f_n(\beta) = \beta$ .

3°) A l'aide des résultats obtenus dans les questions C) 1°) et 2°), établir que toutes les courbes  $(C_n)$  se coupent en un point A que l'on placera sur la figure.

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , préciser les positions relatives de  $(C_n)$  et  $(C_{n+1})$ .

## EXERCICE 21:

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$

1°) Déterminer l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$ .

2°) Démontrer que pour tout  $x$  de  $D_f$   $f(x) > x + |x|$ .

3°) En déduire le signe de  $f(x)$  sur  $D_f$ .

4°) Etudier la fonction et tracer sa courbe représentative ( $C_f$ ).

5°) Soit  $g$  la fonction définie par  $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

a) résoudre l'équation  $g(x) = -\ln(3 - 2\sqrt{2})$ .

b) Démontrer que  $g$  est une fonction impaire ;

c) Etudier  $g$  et tracer sa courbe ( $C_g$ ).

d) Démontrer que  $g$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  ; et que pour tout entier relatif  $n$ ,

$$g\left(\frac{e^n + e^{-n}}{2}\right) = n.$$

## EXERCICE 22:

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln x$ .

1°) Étudier les variations de la fonction  $f$  ;

2°) Construire la courbe ( $C_f$ ) de  $f$  dans un repère orthogonal d'unités graphiques : 10cm sur l'axe des abscisses et 5cm sur l'axe des ordonnées.

3°) On note  $\lambda$  un réel strictement positif.

a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer  $\int_{\lambda}^1 \ln x \, dx$  ;

b) En déduire la valeur de  $I(\lambda) = \int_{\lambda}^1 f(x) \, dx$ . Donner une interprétation graphique de ce résultat.

c) Déterminer la limite  $\ell$  de  $I(\lambda)$  quand  $\lambda$  tend vers  $0^+$ .

4°) Pour tout entier naturel  $n$  supérieure ou égal à 2 on pose :  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n f\left(\frac{p}{n}\right)$

a) En utilisant le sens de variation de  $f$  sur  $]0 ; 1]$  ; démontrer que, pour  $p$  entier naturel vérifiant  $1 \leq p \leq n-1$ , on a :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{p+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} f(x) \, dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{p}{n}\right).$$

b) En déduire que :  $S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n$ , puis que

$$I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

c) En déduire que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{3}$ .

## EXERCICE 23

Une entreprise fabrique un produit en quantité  $x$ , exprimée en milliers de tonnes. Le coût total de fabrication est donné par :  $C_T(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{9}{2} \ln(x+1)$

pour  $x \in [0 ; 5]$ . Les coûts sont exprimés en millions de francs.

A-/ Étude d'une fonction auxiliaire.

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0 ; 5]$  par :  $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{9x}{x+1} - 9 \ln(x+1)$ .

1°) Calculer  $f'(x)$ . Vérifier que  $f'(x) = \frac{x(x-2)(x+4)}{(x+1)^2}$ .

2°) Établir le tableau de variation de  $f$  sur  $[0 ; 5]$ .

3°) En déduire que  $f$  s'annule sur  $[0 ; 5]$  pour une valeur unique  $\ell$ .

4°) Déterminer des résultats précédents le signe de  $f$  sur  $[0 ; 5]$ .

B-/ Étude d'un coût moyen  $C_m$ .

La fonction coût moyen est définie sur  $[0 ; 5]$  par :  $C_m(x) = \frac{C_T(x)}{x} = \frac{x}{2} + \frac{9}{2} \left[ \frac{\ln(x+1)}{x} \right]$

1°) Calculer  $C_m'(x)$ . Vérifier que l'on peut écrire  $C_m'(x) = \frac{f(x)}{x^2}$  où  $f$  est la fonction auxiliaire de la question A-/.

2°) Étudier le sens de variation de  $C_m$  sur  $]0 ; 5]$ .

3°) Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimal exprimé en francs par tonnes ? Quel est ce coût ?

## EXERCICE 24 :

Une entreprise fabrique des objets dont le coût de production en francs, de  $q$  objets est donné par la fonction  $C(q) = 20 \ln(3q+1)$ .

1°) Déterminer le coût de fabrication de 5 objets, de 10 objets.

On arrondira le résultat au centimètre près.

2°) Quel est le nombre d'objets fabriqués sachant que le coût de production s'élève à 90,22F ?

3°) Étudier les variations de  $C$  et construire sa courbe représentative ( $\mathcal{C}$ ) pour  $q$  variant de 0 à 50.

4°) Chaque objet est vendu à 3 F

a) Exprimer la fonction bénéfice  $B$  en fonction de  $q$ .

b) Calculer  $B(5)$  ;  $B(10)$  ; puis  $B(40)$ .

c) En utilisant le graphique, déterminer la quantité minimale d'objets que doit vendre l'entreprise pour être bénéficiaire en supposant qu'elle vend toute sa production.