DEUXIEME EVALUATION DE MATHEMATIQUES POUR LE PREMIER TRIMESTRE

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES

EXERCICE I : [5Pts]

I- On considère le polynôme complexe P défini par :

$P(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1$; z étant un nombre complexe non nul.

1) Montrer que si un nombre complexe z_0 est une racine de P, alors $\bar{z}_0$, $\frac{1}{z_0}$ et $\frac{1}{\bar{z}_0}$ sont aussi des racines de P. **[0,75Pt]**
2) Démontrer que le nombre complexe $z_0 = 1 + i$ est une racine P. **[0,5Pt]**
3) Déduire toutes les autres solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$. **[0,75Pt]**

II- On donne les points A et B d'affixes respectifs $z_A = 1 + i$ et $z_B = 1 - i$. Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé $(o; \vec{u}; \vec{v})$. Unité graphique, 4cm sur les axes.

1) Placer les points A et B dans le plan décrit ci-dessus. **[0,5Pt]**
2) Écrire les nombres complexes z_A , z_B , $\frac{z_A}{z_B}$ et $z_A.z_B$ sous leurs formes trigonométriques et exponentielles. **[2Pts]**
3) Soit M un point du plan, d'affixe z. Démontrer que l'ensemble (Γ) des points du plan tels que $|z - 1 - i| = |z - 1 + i|$, est la médiatrice du segment [AB]. **[0,5Pt]**

EXERCICE II : [6Pts]

Soit f une fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Étudier les variations de f et construire son tableau de variation. **[1Pt]**
2) Étudier les branches infinies de f et construire soigneusement (C). **[1Pt]**
3) Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\beta \in [1 ; 2]$. **[1Pt]**
4) Démontrer que pour tout nombre réel appartenant à l'intervalle $[1 ; 2]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$. **[0,5Pt]**
5) Soit (U_n) la suite numérique définie par $U_0 = 2$; $U_{n+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{U_n}}$.
   a- Montrer par récurrence que la suite (U_n) est majorée par 2 et minorée par 1 ; pour tous nombres entiers naturels. **[1Pt]**
   b- Démontrer que pour tous nombres entiers naturels, $|U_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{2}|U_n - \beta|$. **[0,5Pt]**
   c- En déduire que pour tous nombres entiers naturels, $|U_n - \beta| \leq (\frac{1}{2})^n$ et montrer que (U_n) converge vers β. **[1Pt]**

EXERCICE III : [4Pts]

Le tableau ci-dessous donne les résultats obtenus à partir de 10 essais de laboratoire concernant la charge de rupture d'un acier en fonction de la teneur en carbone.

Teneur en carbone x_i	70	60	68	64	66	64	62	70	74	62
Charge de rupture y_i en kg	87	71	79	74	79	80	75	86	95	70

1) Représenter le nuage de point de $(x_i ; y_i)$. On prendra un centimètre en abscisse pour une unité à partir de 60 ; en ordonnée on prendra un centimètre pour 2 kg à partir de 70. **[1Pt]**
2) Calculer les coordonnées du point moyen G de ce nuage. **[0,5Pt]**

3) Déterminer la valeur approchée du [illegible] série statistique double. Interpréter le résultat. **[1Pt]**
4) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x, par la méthode des moindres carrés. On donnera les valeurs approchées des coefficients au millième près. **[1Pt]**
5) Un acier a une teneur en carbone de 77. Donner une estimation de sa charge rupture. **[0,5Pt]**

PARTIE B : EVALUATION DES RESSOURCES.

BOB, un jeune investisseur décide de faire deux placements.

- Pour le premier placement, il achète de la crypto monnaie pour la somme de 1 025 000 frs CFA. L'opérateur lui garantit un taux d'intérêts cumulés (les intérêts de la semaine précédente sont ajoutés au capital de cette semaine-là et l'ensemble constitue le capital de la semaine suivante) hebdomadaire fixe de 1,5%.
- Le deuxième placement est fait avec pour ambition l'achat d'un véhicule d'occasion, à son épouse, coutant 1 650 000 frs CFA. Pour cela, il emprunte à sa banque la somme de 2 100 000 frs CFA à un taux d'intérêt annuel de 11%. Cet argent il le confie à un groupe d'investisseurs qui lui garantit un intérêt net de 36 175frs CFA par semaine.

Le premier placement est fait sur une durée de 52 semaines, le second quant à lui est maintenu le temps nécessaire pour avoir un montant permettant de rembourser totalement la banque et d'acheter le véhicule.

Parallèlement, BOB possède une palmeraie trapézoïdale dont les sommets sont les points ayant pour affixes les solutions dans $\mathbb{C}$, de l'équation $(z^2 - 4)(z^2 - 10iz - 29) = 0$. Pendant l'unique récolte de chaque année, il réalise un bénéfice moyen de 485 000 par hectare.

1) Déterminer le montant qu'obtiendra BOB à la fin du premier placement. **[1,5Pt]**
2) Déterminer le nombre de temps nécessaire pour que BOB achète son véhicule d'occasion. **[1,5Pt]**
3) Quel bénéfice moyen réalise BOB chaque année après les récoltes dans sa plantation ? **[1,5Pt]**

PRESENTATION : [0,5Pt]