Collège Mgr. F.X. VOGT		ANNÉE SCOLAIRE 2021-2022
DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES	SESSION INTENSIVE	03 février 2022
	EPREUVE DE MATHÉMATIQUES	
Niveau : **T^le C**	Durée : **4 h**	Coefficient : **7**

Partie A : Evaluation des ressources **15 points**

<u>Exercice 1</u> : 4,25 points

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x^2+2x} & si\ 0\leq x\leq 1\\ -x+2\sqrt{2-\frac{1}{x}} & si\ x>1\end{cases}$ et (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé.

1.a) Etudier la dérivabilité de f en 0 et en 1. **0,75 pt**

b) Montrer que pour tout réel $x\in\,]1;\,+\infty[$, $f'(x)<0$. **0,5 pt**

2. Etudier les variations de f, puis dresser son tableau de variations. **1 pt**

3. Soit g la restriction de f à l'intervalle $]1;\,+\infty[$. Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution β dans $]1;\,+\infty[$ et donner un encadrement de β d'amplitude 10^{-1}. **1 pt**

4. Calculer $g^{-1}(\sqrt{6}-2)$ et $(g^{-1})'(\sqrt{6}-2)$. **0,5 pt**

5. Tracer (C_f) avec soin. **0,5 pt**

<u>Exercice 2</u> : 4 points. I et II sont indépendants.

I- 1.a) θ est un réel de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2Z^2(1+\cos 2\theta)-2Z\sin 2\theta+1=0$ **1 pt**

b) Donner le module et un argument de chacune des solutions Z_1 et Z_2 de cette équation. **0,75 pt**

2. On désigne par M_1 et M_2 les points images respectifs des nombres complexes $(\sin\theta-i\cos\theta)$ et $(\sin\theta+i\cos\theta)$ dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Trouver θ pour que le triangle OM_1M_2 soit isocèle rectangle en O. **0,75 pt**

II- Soit le nombre complexe $z=1-\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$

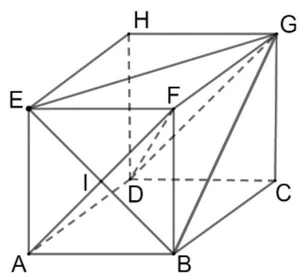
1. Démontrer que $z=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$. **0,25 pt**

2. Déterminer le module et un argument de z. **0,5 pt**

3. En déduire la valeur exacte de chacun des réels : $\sin\frac{\pi}{12}$; $\sin\frac{5\pi}{12}$; $\cos\frac{5\pi}{12}$. **0,75 pt**

<u>Exercice 3</u> : 3 points

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête a, a étant un nombre réel strictement positif et I est le centre de la face $ABFE$.



1.a) Justifier que la droite (AD) est orthogonale au plan (ABF). **0,25 pt**

b) Les droites (AD) et (BE) sont-elles orthogonales ? justifier clairement la réponse. **0,25 pt**

c) Calculer les produits vectoriels : $\overrightarrow{BF}\wedge\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{IB}\wedge\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AF}$ **0,75 pt**

2. On considère les vecteurs $\vec{\imath}=\frac{1}{a}\overrightarrow{AB}$; $\vec{\jmath}=\frac{1}{a}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k}=\frac{1}{a}\overrightarrow{AE}$.

a) Vérifier que $(A;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace. **0,25 pt**

b) Montrer que la droite (DF) est orthogonale au plan (EBG). **0,5 pt**

c) Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG). **0,5 pt**

d) Calculer en fonction de a le volume du tétraèdre $FEBG$. **0,5 pt**

<u>Exercice 4</u> : 3,75 points I et II sont indépendants.

I- On définit une suite numérique (u_n) par : $u_0 = \frac{4}{5}$ et $u_{n+1} = \cos u_n + \frac{1}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $f(x) = \cos x + \frac{1}{4}$ et $I = \left[\frac{3}{4}; 1\right]$.

1. Montrer que l'équation $\cos x = x - \frac{1}{4}$ admet une solution unique $\alpha \in I$. **0,75 pt**

2. Montrer que $f(I) \subset I$ et que $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leq 0{,}9$. **0,5 pt**

3.a) Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \in I$ et $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}9|u_n - \alpha|$. **0,75 pt**

b) En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{5}(0{,}9)^n$. **0,5 pt**

4. Démontrer que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite. **0,25 pt**

II- On considère le nombre complexe $z = e^{i\theta} - ie^{-i\theta}$, où θ est un nombre réel.

1. Démontrer que $z = z_0 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ où z_0 est un nombre complexe indépendant de θ. **0,5 pt**

2. Donner alors le module et un argument de z pour $\theta \in \left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[$ et pour $\theta \in \left]\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right[$. **0,5 pt**

Partie B : Evaluation des compétences **5 points**

Situation :

Un pays P compte actuellement 6 millions d'habitants. Cette population s'accroît naturellement chaque année de 10 %. Par ailleurs, chaque année, ce pays attire un million d'immigrés. Pour des besoins économiques, on aimerait savoir au bout de combien d'années la population de ce pays dépassera 84 millions d'habitants.
Les lettres du tableau ci-dessous représentent les villages d'un arrondissement de ce pays et les nombres représentent en Km la distance à parcourir sur une route qui relie un village à un autre lorsqu'elle existe. Un ingénieur voudrait installer les fibres optiques dans ces villages en utilisant les câbles, en partant d'un village quelconque. Un cycliste, qui roule à une vitesse constante de 30km /h, part du village A à 8h10mn pour le village H en empruntant le plus court chemin possible.

	B	C	D	E	F	G	H
A	**50**			**70**	**20**		
B		**70**		**10**			
C				**60**			
D		**40**					
E			**55**		**35**		**20**
F						**20**	**35**
G							**50**
H			**55**				

Tâches :

1. Quelle est la longueur minimale de câble à utiliser pour couvrir les 7 villages ? **1,5 pt**

2. A quelle heure le cycliste arrivera au village H ? **1,5 pt**

3. Au bout de combien d'années la population de ce pays dépassera 84 millions d'habitants. **1,5 pt**

Présentation : 0,5 pt