

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES N°1 DU 2^{ème} TRIMESTRE

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES : (15 points)

EXERCICE 1 : (4,25 points)

$ABCD$ est un carré de centre O et de sens direct tel que $AB = 4\text{cm}$. On note I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[DC]$. On désigne par r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$; t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$; h l'homothétie de centre C et de rapport $\sqrt{3}$. On pose $\varphi = t \circ r$.

1. Ecris t , puis r comme composée de deux réflexions d'axes à préciser. 1pt
2. Déduis-en la nature et les éléments caractéristiques de φ . 0,5pt
3. Détermine et construis l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $\frac{MD}{MC} = \sqrt{3}$. 1pt
4. On considère la transformation $f = \varphi \circ h$; soit Ω son centre.
 - (a) Détermine l'image de C par f . 0,5pt
 - (b) Donne la nature et les éléments caractéristiques de f . 0,5pt
 - (c) Montre que Ω appartient à (Γ) et au cercle de diamètre $[DC]$. 0,5pt
 - (d) Détermine $\text{mes}(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C\Omega})$. 0,25pt

EXERCICE 2 : (2 points)

Pour tout réel x , on pose $A(x) = -1 + 2\cos^2 x + 2\sin x \cos x$.

1. Montre que pour tout réel x , on a : $A(x) = \sqrt{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$. 0,5pt
2. Résous dans $[0; 2\pi[$ l'équation $(E): A(x) = -1$. 1pt
3. Place les points images des solutions de (E) sur le cercle trigonométrique. 0,5pt

EXERCICE 3 : (4,5 points)

A) Soit f un endomorphisme d'un plan vectoriel E de base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, qui à tout vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, associe le vecteur $\vec{u}' = f(\vec{u}) = (-2x + y)\vec{i} + (4x - 2y)\vec{j}$.

1. Donne la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$. 0,5pt
2. f est-il un automorphisme ? Justifie ta réponse. 0,5pt
3. Montre que $\ker f$ est une droite vectorielle dont une base est $\vec{e}_1 = \vec{i} + 2\vec{j}$. 0,5pt
4. Montre que $\text{Im } f$ est une droite vectorielle dont une base est $\vec{e}_2 = -\vec{i} + 2\vec{j}$. 0,5pt
5. Montre que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de E , puis écris la matrice M' de f dans cette base. 0,75pt

B) Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + 2z = 0\}$. On pose $\vec{u}(1, 1, 0)$ et $\vec{v}(0, 2, 1)$.

1. Montre que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. 0,75pt
2. Montre que $(\vec{u}, \vec{v})$ est un système libre et générateur de E . Que peux-tu conclure ? 0,75pt
3. Quelle est la dimension de E ? 0,25pt

EXERCICE 4 : (4,25 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$. On note (C_f) la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Détermine trois réels a, b et c tels que pour tout $x \neq 1$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$. **0,5pt**
 (b) Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. **1pt**
 (c) Montre que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe (C_f) . **0,5pt**
2. Montre que le point $\Omega(1; 3)$ est centre de symétrie pour la courbe (C_f) . **0,5pt**
3. On considère la droite (Δ) d'équation $x - 2y + 4 = 0$ et le point $A(1; 0)$.
 (a) Vérifie que le cercle $\mathcal{C}$ de centre A et tangent à la droite (Δ) a pour équation :

$$x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0. \quad \textbf{0,75pt}$$

 (b) Ecris une représentation paramétrique de $\mathcal{C}$. **0,5pt**
4. Donne le programme de construction de la courbe C_g de la fonction $g : x \mapsto f(|x|)$. **0,5pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (5 points)**SITUATION :**

Un magasin d'informatique propose différents produits tels que des ordinateurs, du matériel d'impression ou des logiciels. Un jour, N clients ont acheté dans ce magasin un seul produit parmi ceux proposés ci-dessus. Ils ont réglé soit en espèces soit en utilisant un compte bancaire. Parmi ces clients : 70% des clients ont payé en utilisant une carte bancaire ; 60% ont acheté du matériel d'impression ; aucun ordinateur n'a été payé en espèces ; le quart de ceux qui ont payé en utilisant une carte bancaire a acheté un logiciel ; parmi les clients ayant payé en espèces, il y en a autant qui ont acheté un logiciel que du matériel d'impression ; 6 clients ont acheté des ordinateurs.

Le magasin d'informatique se fournit en ordinateurs auprès d'une entreprise locale qui peut fabriquer au maximum 10 ordinateurs par semaine. On note x le nombre d'ordinateurs produits en une semaine et on admet que pour $x \in [1; 10]$, le coût total de fabrication, exprimé en **dizaines de milliers de FCFA**, est égal à $f(x) = x^2 - 12x + 96$.

Pendant les fêtes de fin d'année, le magasin d'informatique organise une tombola. **M. ATEBA**, un fidèle client est éligible à un prix de la tombola. Pour avoir son gain, il est invité à tirer au hasard et simultanément 3 boules dans un sac qui en contient 5 rouges et 3 blanches indiscernables au toucher. Chaque boule blanche rapporte 10000 **FCFA** et chaque boule rouge rapporte 5000 **FCFA**.

Tâches :

1. Détermine le nombre total N de clients du magasin ce jour-là. **1,5pt**
2. Détermine la valeur du coût minimal de fabrication des ordinateurs en une semaine. **1,5pt**
3. Détermine tous les gains possibles de **M. ATEBA** et le nombre de tirages y conduisant. **1,5pt**

Présentation générale :**0,5pt**