Ministère des Enseignements Secondaires
Lycée Bilingue de Bocklé
Matr : 1CL1GSBD100603111
Département de **Mathématiques**
M. NGNAZOKE W. Armand, PLEG-Maths

Année Scolaire : 2021-2022
Epreuve : Mathématiques
Classe : T^{le}D ; Durée : 4h
Evaluation : 1 **Trimestre :** 2
Date : 31/01/2022 ; **Coef :** 4.

L'épreuve comporte deux parties sur deux pages.

Partie A : Evaluation des Ressources (15points)

Exercice 1. (5.5points)

1 *On considère le polynôme p défini pour tout z de l'ensemble $\mathbb{C}$ par : $p(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$.*

- **a** *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Montrer que si $p(z_0) = 0$, alors $p(\bar{z}_0) = 0$ où $\bar{z}_0$ est le conjugué de z_0.* **[0.5pt]**
- **b** *Calculer $p(1 + i\sqrt{3})$, puis factoriser $p(z)$.* **[0.5pt]**
- **c** *Déduire les solutions de l'équation $p(z) = 0$.* **[0.25pt]**

2 *Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$. (unité grahique 2cm) Soit A, B et C les points d'abscisses $a = 4, b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = \bar{b}$ où $\bar{b}$ est le conjugué de b.*

- **a** *Placer les points A, B et C sur une figure que l'on complétera au fur et à mesure.* **[0.75pt]**
- **b** *Déterminer la nature exacte du triangle ABC.* **[0.75pt]**

3 *Soit K le point d'affixe $z_k = -\sqrt{3} + i$, F le point d'affixe $z_F = e^{i\frac{\pi}{3}} z_k$ et G le point d'affixe $z_G = z_k + z_{\overrightarrow{OB}}$*

- **a** *Ecrire sous forme algébrique z_F et z_G.* **[0.5pt]**
- **b** *Montrer que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires.* **[0.75pt]**

4 *Soit H le quatrième sommet du parallélogramme $COFH$*

- **a** *Calculer z_H l'affixe de H puis montrer que le parallélogramme $COFH$ est un carré.* **[0.75pt]**
- **b** *Déterminer la nature du triangle AGH.* **[0.75pt]**

Exercice 2. (4.25points)

1 *Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g définie par : $g(x) = \ln\left(\frac{x-4}{2+x}\right)$.* **[0.75pt]**

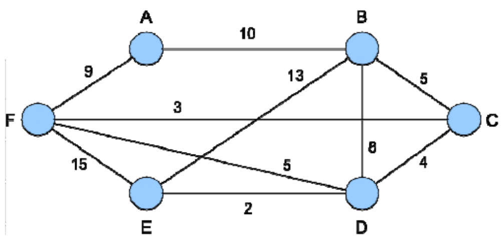
2 *Déterminer une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x+1}{x+3}$; sur $]-3; +\infty[$.* **[0.75pt]**

3 *Pendant six semaines, on a relevé dans un marché périodique de la ville de Garoua : le prix moyen (X) du kilogramme de tomate et le prix moyen (Y) du kilogramme d'oignon pratiqués par semaine. On a obtenu le tableau suivant :*

X(en francs)	800	950	830	1000	870
Y(en francs)	1960	2150	1990	2200	2030

- **a** *Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage des points associé à cette série statistique double.* **[0.5pt]**
- **b** *Déterminer une équation de la droite de regréssion de y en x.* **[1pt]**

4 *Déterminer le Plus Court Chemin du sommet F à tous les autres sommets du graphe.* **[1.25pt]**



Exercice 3. **(5.75points)**

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = 1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$. On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

$\boxed{1}$ ⓐ *Calculer $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.* **[1pt]**

ⓑ *Montrer que f est dérivable sur $]1;+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{-1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$.* **[0.5pt]**

ⓒ *Dresser le tableau de variation de f et vérifier que $f([2;3]) \subset [2;3]$.* **[0.5pt]**

ⓓ *Montrer que pour tout $x \in [2;3]$; $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.* **[0.5pt]**

$\boxed{2}$ *Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in [2;3]$.* **[0.5pt]**

ⓐ *Montrer que f réalise une bijection de $]1;+\infty[$ sur un intervalle J dont on déterminera.* **[0.5pt]**

ⓑ *Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.* **[0.5pt]**

$\boxed{3}$ *Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :* $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

$\boxed{4}$ *Montrer par recurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}; 2 \leq U_n \leq 3$.* **[0.5pt]**

$\boxed{5}$ *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $|U_{n+1}-\alpha| \leq \dfrac{1}{3\sqrt{3}}|U_n-\alpha|$.* **[0.5pt]**

$\boxed{6}$ *En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $|U_n-\alpha| \leq \left(\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\right)^n |U_0-\alpha|$.* **[0.5pt]**

$\boxed{7}$ *Montrer que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.* **[0.25pt]**

Partie B : Evaluation des Compétences (5points)

Alain possède trois terrain $1,2$ et 3.

Le terrain 1 a une forme telle que la représentation dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (Unité graphique des axes 6 cm) est un polygône dont les sommets A, B et C ont pour affixes respectives $e^{-i\frac{\pi}{2}}, 2$ et $-3+i$.

Le terrain 2 a une forme telle que dans le plan complexe rapproté à un repère orthonormé (Unité graphique des axes 6 cm) est l'ensemble des points M dont l'affixe z est tel que $|i\bar{z}+1-3i| = 4$.

Le terrain 3 a une forme telle que dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (Unité graphique des axes 6 cm) est l'ensemble des points M dont l'affixe z est tel que $\arg\left(\dfrac{z-3+i}{z+2i}\right) = \dfrac{\pi}{3}+k\pi \; (k \in \mathbb{Z})$.

Alain veut clôturer chacun des trois terrains à l'aide d'un grillage vendu à 5000 Frs les $3m$.

$\boxed{1}$ Combien va-t-il dépenser pour clôturer le terrain 1 ? ***[1.5pt]***

$\boxed{2}$ Combien va-t-il dépenser pour clôturer le terrain 2 ? ***[1.5pt]***

$\boxed{3}$ Combien va-t-il dépenser pour clôturer le terrain 3 ? ***[1.5pt]***

<u>Présentation</u> : Lisibilité, absence de fautes, résultats bien encadrés **0.5pt**

André WEIL : *La logique est l'hygiène des Mathématiques.*