EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Niveau : T^{le} **C** Durée : **4 h** Coefficient : 7

Partie A : Evaluation des ressources **13 points**

Exercice 1 : 4,25 points

I- On considère la fonction numérique g définie par $g(x) = \sin x + \frac{1}{2}\cos 2x$. On désigne par (C_g) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Montrer que la fonction g est périodique de période 2π. **0,25 pt**
2. Etudier les variations de g sur $[0; 2\pi]$ et dresser son tableau de variations. **1,75 pt**
3. Tracer la représentation graphique de la restriction de g à l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$. **0,75 pt**

II- Soit f la fonction définie sur $A = \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$ par : $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de A sur un ensemble B que l'on déterminera. **0,75 pt**
2. Calculer $(f^{-1})'(-2)$, nombre dérivée de f^{-1} en -2. **0,75 pt**

Exercice 2 : 5 points

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+3x-4} & si\ x \in]-\infty; -4[\cup]1; +\infty[\\ \sqrt{-x^2-3x+4} & si\ x \in [-4; 1] \end{cases}$ et (C_f) la courbe représentant f dans le plan muni du repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1.a) Déterminer l'ensemble D_f de définition de f, étudier la dérivabilité de f en -4 et en 1, puis interpréter graphiquement les résultats. **1,25 pt**

b) On admet que f est continue sur D_f. Donner l'ensemble $D_{f'}$ de dérivabilité de f' fonction dérivée de f. **0,25 pt**

2.a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_{f'}$. **0,5 pt**

b) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, puis dresser le tableau de variations de f. **1 pt**

3. Déterminer la nature de la branche infinie de (C_f) au voisinage de $-\infty$, puis la nature de la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$. **1,25 pt**

4. Tracer (C_f) avec soin. **0,75 pt**

Exercice 3 : 3,75 points

E désigne un espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et f l'endomorphisme de E défini par : $f(\vec{\imath}) = \vec{\imath}$; $f(\vec{\jmath}) = f(\vec{k}) = \frac{1}{2}(\vec{\jmath} + \vec{k})$

1. Déterminer Imf, puis déterminer une base de Imf. **0,75 pt**
2. Déterminer la dimension de $kerf$ et donner une base de $kerf$. **0,75 pt**
3. Démontrer que tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de $kerf$ et d'un vecteur de Imf. **0,5 pt**
4. F désigne l'espace vectoriel réel de base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$.

On considère l'application linéaire de E vers F défini par :

$$g(\vec{\imath}) = -2\vec{e_1} + \vec{e_2}\ ; \quad g(\vec{\jmath}) = \vec{e_1} - 2\vec{e_2}\ ; \quad g(\vec{k}) = \vec{e_1} + \vec{e_2}.$$

a) Déterminer $kerg$ et donner une base de $kerg$. **0,5 pt**

b) Déterminer Img, puis déterminer une base de Img. **0,5 pt**

c) Écrire la matrice de $g \circ f$ relativement aux bases $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$. **0,75 pt**

Partie B : Evaluation des compétences **7 points**

Situation :

Karawa est un homme d'affaires. La production de sa société pendant les 10 dernières années est consignée dans le tableau ci-dessous.

Année (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Production en tonnes (y_i)	3	4	5,1	6	7,5	8	9,4	10,5	11,5	13

Pour la réalisation d'un projet d'ouverture d'une nouvelle entreprise, il aimerait avoir une estimation de cette production de sa société à la 13ème année, mais il ne sait comment procéder.

Ayant besoin de beaucoup d'argent pour la réalisation de son projet, il veut fixer le prix du produit soit à 2500 francs, soit à 4100 francs et il fait mener une enquête pour établir le nombre d'acheteurs (en milliers) de ce produit en fonction de son prix de vente (en milliers de francs). Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau ci-dessous :

Prix de vente (x_i)	1	1,5	2	3	3,5
Nombre d'acheteurs (y_i)	3	2,5	2	1	0,75

Son ami statisticien lui dit qu'on peut l'aider à choisir le prix de vente avantageux pour lui par la méthode des moindres carrés et il ne sait pas de quoi il s'agit.

Monsieur Karawa a pu ouvrir une entreprise de confection des uniformes scolaires. Son entreprise reçoit une commande pour la confection de 4500 uniformes scolaires. Le tableau ci-dessous donne le rythme de confection de ces tenues.

Nombre de tenues déjà confectionnées (x_i)	100	150	250	500	600	750	800	900	1000	1200
Nombres de jours déjà écoulés (y_i)	7	9	12	20	25	30	33	40	45	55

Pour la bonne image de sa nouvelle entreprise, il a le souci de respecter les délais fixés. Pour cela il souhaite avoir une idée du nombre de jours qu'il faudra pour livrer la commande. Tous les résultats seront arrondis au millième. On admet que le rythme du travail reste celui donné par le tableau-dessus.

Tâches :

1. Quel serait la production de la société de Monsieur Karawa à la 13ème année ? **2,25 pt**
2. Estimer en utilisant la méthode des moindres carrés, le nombre d'acheteurs potentiels si le produit est vendu à 2500 francs. Quel est alors le prix de vente avantageux pour M. Karawa ? 2500 francs ou 4100 francs ? **2,25 pt**
3. Combien de jours faut-il à l'entreprise pour livrer la commande ? **2,25 pt**

Présentation : 0,25 pt