



**EPREUVE DE MATHÉMATIQUE**

**I. EVALUATION DES RESSOURCES (15pts)**

**Exercice 1 (3,5pts)**

On considère les complexes :  $Z_1 = 1 - i$  ;  $Z_2 = 1 - i\sqrt{3}$  ;  $Z = \frac{Z_1^5}{Z_2^4}$

1. Calculer le module et un argument de  $Z_1, Z_2$  et  $Z$  1,5pt
2. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de  $Z$ . 1pt
3. En déduire les valeurs exactes de  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$ . 1pt

**Exercice 2 (5,5pts)**

I. utilisant l'inégalité des accroissements finis montrer que pour entier naturel  $n \geq 1$  :

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad 1\text{pt}$$

II. On donne  $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$  et  $I = ]1; +\infty[$

Montrer que  $g$  est une bijection de  $I$  sur un intervalle  $J$  à préciser. 1pt

III.  $h(x) = -x^3 + 3x + 1$

1. Calculer  $h'(x)$  et dresser le tableau de variation de  $h$  sur  $[-2; 2]$  1,5pt
2. Justifier que  $h(x) = 0$  admet une solution unique dans l'intervalle  $[-2; -1]$  1pt
3. Déterminer la primitive de  $h$  sur  $[-2; 2]$  qui s'annule en 0. 1pt

**Exercice 3 (5,5pts)**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{x}{1+x+x^2} \text{ et } (C) \text{ sa représentation graphique dans le plan rapporté à un repère orthonormé } (o, \vec{i}, \vec{j})$$

Dont l'unité est 2cm.

1. Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation. 2pts
2. Donner une équation de la tangente  $T$  à la courbe  $(C)$  au point d'abscisse 0. Préciser la position de  $T$  par rapport à  $(C)$  1,5pt
3. Construire  $(C)$  et  $T$  dans le repère  $(o, \vec{i}, \vec{j})$ . 1pt

On considère la suite  $U$  définie par  $U_0 = 1$  et pour tout entier naturel non nul  $U_{n+1} = f(U_n)$

4. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul,  $0 \leq U_n \leq 1$  1pt
5. Montrer que pour tout entier naturel non nul,  $U_{n+1} \leq U_n$ . En déduire que  $U$  est convergente. 1,5pt

**A- EVALUATION DES COMPETENCES (5pts)**

Alphonse, Merlin et Michelle veulent se lancer dans le commerce au même mois. Le chiffre d'affaire de Alphonse au premier mois s'élève à  $U_1 = 50000F$  et après  $n$  mois il s'élève à

$U_n = U_{n-1} + 3000$ . Merlin a un chiffre d'affaire de  $V_1 = 20000F$  au premier mois et après  $n$  mois son chiffre d'affaire s'élève à  $V_n = 5V_{n-1}$ . Quant à Michelle son chiffre d'affaire  $W_n$  dépend de celui de d'Alphonse. Sachant que au bout de  $n$  mois  $W_n = 4(U_1 + U_2 + \dots + U_n) + 30$

**Tâche**

- 1) Calcule le chiffre d'affaire de Michelle au bout de trois ans. (1,5pts)
- 2) Calcule le chiffre d'affaire de Merlin au bout de trois ans. (1,5pts)
- 3) Calcule le chiffre d'affaire de Alphonse au bout de trois ans. (1,5pts)

**Présentation 0,5pt**

Sujetexa.com