PRIMITIVES

Exercice 1. ***Dans chacun des cas suivants, trouver une primitive de la fonction f.***

❶ $5x^4+2x^3-3x^2$.

❷ $-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}$.

❸ $(3x-1)^2.\sqrt{3x-1}$.

❹ $\dfrac{x^4-2x^2+3}{x^2}$.

❺ $\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x-5}}$.

❻ $\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$.

❼ $\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x+4}}$.

❽ $\dfrac{x+5}{(x-1)^4}$.

❾ $\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$.

❿ $\cos^3 x$.

① $\sin^5 x$.

② $\tan^2 x$.

③ $\sin^2 x.\cos^2 x$.

④ $1+\tan^2(3x)$.

⑤ $\dfrac{\cos(2x)}{\sin^2(2x)}$.

⑥ $\dfrac{1}{\cos^4 x}$.

⑦ $\dfrac{\cos x}{(3\sin x-4)^4}$.

⑧ $\dfrac{1}{\tan^2 x}+1$.

⑨ $\dfrac{\tan^2 x-2\tan x}{\cos^2 x}$.

⑩ $\dfrac{\cos x}{1-\cos(2x)}$.

Exercice 2. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ par : $f(x)=\dfrac{x^3+3x}{(x^2-1)^3}$.*

❶ *Déterminer les réels a, b tels que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$: $f(x)=\dfrac{a}{(x^2-1)^3}+\dfrac{b}{(x^2+1)^3}$.*

❷ *Déterminer la primitive F de f sur $]-1,1[$ telle que $F(0)=-2$.*

Exercice 3. *Soit $f(x)=\dfrac{2x}{x+\sqrt{x^2-1}}$.*

❶ *Déterminer D_f.*

❷ *Trouver une primitive de f sur $]-\infty,-1[$.*

❸ *Déterminer F la primitive de f sur $]-\infty,-1[$ telle que $F(-2)=\dfrac{2}{3}$.*

Exercice 4. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par : $f(x)=\dfrac{x^3-x^2-x+5}{(x-1)^2}$.*

❶ *Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{(x-1)^2}$.*

❷ *Déterminer une primitive de f sur $]1;+\infty[$.*

Exercice 5. *On considère les fonctions : f définie sur $[-1,+\infty[$ par $f(x)=x^2\sqrt{x+1}$ et g définie sur $]-1,+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$.*

❶ *Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $x^2=a(x+1)^2+b(x+1)+c$.*

❷ *Déterminer les primitives F de la fonction f.*

❸ *Déterminer les primitives G de la fonction g.*

Exercice 6. ❶ *Calculer la dérivée de la fonction : $f(x)=x+\sqrt{x+1}$.*

❷ *En déduire une primitive de chacune des fonctions suivantes :*

(a) $g(x)=\dfrac{(x+\sqrt{1+x})^2}{\sqrt{1+x^2}}$.

(b) $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})}$.

Exercice 7. *Déterminer une fonction polynôme P dont la fonction dérivée est : $P'(x)=x^2-5x+6$ et dont le maximum relatif est le double du minimum relatif.*

Exercice 8. *Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$.*

❶ ***a)*** *Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$*

b) *Etudier les variations de f sur $[0;+\infty[$ et dresser son tableau de variation.*

❷ *Soit F la primitive de f sur $[0,+\infty[$ telle que $F(0)=0$.*

a) *Pourquoi peut-on affirmer l'existence de F sur $[0,+\infty[$?*

c) *Quelles sont les variations de F sur $[0,+\infty[$?*

sujetexa.com

❸ *On définit sur $[0,+\infty[$ les fonctions H et K par $H(x) = F(x) - x$ et $K(x) = F(x) - \frac{2}{3}x$.*

a) *Etudier sur $[0,+\infty[$ les variations de H et K*

b) *En déduire que, pour tout $x \geq 0$, on a : $\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$.*

c) *En déduire la limite de F en $+\infty$.*

❹ **a)** *Démontrer que l'équation $F(x) = \pi$ admet une solution unique α sur $[0,+\infty[$.*

b) *Montrer que l'on peut préciser : $\pi \leq \alpha \leq \frac{3}{2}\pi$.*

Exercice 9. *Soit la fonction f définie sur $]-1,1[$ par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.*

❶ *Prouver l'existence et l'unicité d'une primitive notée F de $f(x)$ telle que $F(0) = 0$.*

❷ *Montrer que la fonction F est imapaire.*

❸ *Soit G la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par : $G(x) = F(\sin x)$.*

a) *montrer que G est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et déterminer $G'(x)$.*

b) *En déduire que : pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[; G(x) = x$.*

c) *Calculer $F(\frac{1}{2}); F(\frac{\sqrt{2}}{2}); F(\frac{\sqrt{3}}{2})$.*

❹ *Soit la fonction $H(x) = F(\frac{2\sqrt{x}}{1+x})$. Montrer que H est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, et calculer $H'(x)$.*

Exercice 10. *Soit f la fonction définie sur $[0,\pi]$ par : $f(x) = \sqrt{1+\cos x}$.*

❶ *Montrer que f est une bijection de $[0,\pi]$ sur $[0,\sqrt{2}]$. (On notera f^{-1} la fonction réciproque de f)*

❷ *Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0,\sqrt{2}[$ et expliciter $(f^{-1})'(x)$.*

❸ *Soit g la fonction définie sur $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$ par $g(x) = \frac{2}{\sqrt{2-x^2}}$ et G la primitive de g sur $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$ qui s'annule en zéro.*

a) *Calculer la dérivée de la fonction $H : x \mapsto g(x) - g(-x)$. En déduire que g est paire.*

b) *Montrer que pour tout $x \in [0,\sqrt{2}]; G(x) = \pi - f^{-1}(x)$. En déduire $G(1)$.*

Exercice 11. *Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.*

❶ **a)** *Montrer que f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.*

b) *Soit F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Montrer que F est impaire.*

❷ *$\forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, on pose $G(x) = F(\tan x)$.*

a) *Montrer que G est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et calculer $G'(x)$. En déduire que $G(x) = x$.*

b) *Calculer $F(\frac{1}{\sqrt{3}})$ et $F(-\frac{1}{\sqrt{3}})$.*

❸ *Soit H la fonction définie par $H(x) = F(\frac{1}{x+1}) + F(\frac{x}{x+2})$. Calculer $H'(x)$.*

En déduire que $F(\frac{1}{2}) + F(\frac{1}{3}) = \frac{\pi}{4}$.

sujetexa.com