LOGARITHME NEPERIEN

Exercice 1. *Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :*

❶ $\ln(x-3)$

❷ $\ln\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$

❸ $\ln(x+3)$

❹ $\ln(2-5x)$

❺ $\ln(x-2)+\ln(x)$

❻ $\ln((x+1)(x-3))$

❼ $\ln\left(\dfrac{x-4}{2+x}\right)$

❽ $\ln(x^2-x)$

❾ $\dfrac{\ln x}{x-1}$

❿ $\dfrac{x}{3-\ln x}$

① $\ln(x^2-5x+6)$

Exercice 2. *Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :*

❶ $\ln(x+6)=\ln(3)$

❷ $\ln(x+2)-\ln(3-x)=0$.

❸ $\ln(x+2)=\ln(1-x)$

❹ $\ln(x^2+1)=\ln(2x)$

❺ $\ln(x)>\ln 1$

❻ $\ln(2x)>\ln\left(\dfrac{1}{x+3}\right)$

❼ $\ln(x^2-4)\leq \ln 5$

Exercice 3. *Simplifier les nombres suivants :*

❶ $\ln(\sqrt{2-\sqrt{2}})+\ln(\sqrt{2+\sqrt{2}})$.

❷ $\ln(\sqrt{\sqrt{2}-1})^{2023}+\ln(\sqrt{\sqrt{2}+1})^{2023}$.

❸ $\ln(12)-(\ln(2)-\ln(3))$.

❹ $2\ln(\frac{7}{3})+2\ln(35)-2\ln(5)-\ln(\frac{1}{9})$.

❺ $\ln(\frac{1}{5})+\ln(\ln(\frac{5}{6})+\ln(6))$.

❻ $\ln(\frac{27}{16})-\ln(4)-\frac{4}{3}\ln 3$.

Exercice 4. *Exprimer en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$ les réels suivants :*

❶ $x=\ln(45)$

❷ $y=\ln(\frac{\sqrt{45}}{3})$

❸ $z=\ln(75)$

❹ $h=\ln(\frac{\sqrt{15}}{9})$

Exercice 5. ❶ *Sans utiliser une calculatrice, comparer les réels a et b.*

$a=\ln(13)-\ln(4)$ *et* $b=\ln(7)-\ln(2)$.

❷ *x, y et z sont trois réels strictement positifs tels que :* $\ln(x)=-\frac{2}{3}\ln(y)$ *et* $\ln(z)=-3$.

Calculer :

$A=\ln\left(\dfrac{x^3y^2}{16z^4}\right)$ $\quad B=2\ln\left(\dfrac{8z^2}{x^6y^4}\right)$.

Exercice 6. *Calculer les limites suivantes :*

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln(x))$

❷ $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{1}{x})$.

❸ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln(x)}$.

❹ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}$.

❺ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5\ln x+1}{2\ln x+3}$.

❻ $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{2x-7}{x+1}\right)$.

❼ $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^2}+\ln x$.

❽ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2x^2+x+1)}{x}$.

❾ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$.

❿ $\lim\limits_{x\to0^+} x(\ln x)^2$.

① $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+8x)}{x}$.

Exercice 7. *Justifier pour chaque cas que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I puis calculer sa fonction dérivée f'.*

❶ $f(x)=\ln(\frac{x^3}{5})$; $\quad I=]0;+\infty[$

❷ $f(x)=\ln\left(\dfrac{3-x}{x+1}\right)$; $\quad I=]-1;3[$.

❸ $f(x)=\ln(|x^2-2x|)$; $\quad I=]0;+\infty[$

Exercice 8. *Déterminer les primitives de la fonction f sur l'intervalle I pour chacune des fonctions suivantes :*

❶ $f(x)=\dfrac{1}{x}$; $\quad I=]-\infty;0[$.

❷ $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$; $\quad I=]1;+\infty[$.

❸ $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$; $\quad I=]0;1[$.

❹ $f(x) = \dfrac{x+1}{x+3}$; $I =]-\infty; -4[$.

Exercice 9. *Déterminer les primitives de la fonction f sur l'intervalle I pour chacune des fonctions suivantes :*

❶ $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $I =]-\infty; 0[$.

❷ $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$; $I =]1; +\infty[$.

❸ $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$; $I =]0; 1[$.

❹ $f(x) = \dfrac{x+1}{x+3}$; $I =]-\infty; -4[$.

Exercice 10. *Calculer*

❶ $\log(0.01) + \log(10000)$.

❷ $\log(0.0002) + \log(0.05)$.

❸ $\log_3(\frac{1}{27}) + \log_2(64)$.

❹ $\log_2(8^{-3}) + \log_5(125^{-3})$.

❺ $\log_{\frac{1}{3}}(\sqrt{35})$.

❻ $\log_4(0.002) + \log_5(30)$.

❼ $\log_9(\sqrt{3}) + \log_{\frac{1}{3}}(27)$.

Exercice 11. *Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :*

❶ $\log_3(2x-1) - \log_3(x) = 1$.

❷ $\log(x) + 1 = \log(x+3)$.

❸ $\log(3x+2) < \log(x+3)$.

❹ $\log_{\frac{1}{2}}(2x+1) \geq \log_{\frac{1}{2}}(x+4)$.

Exercice 12. *On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 + \dfrac{\ln x}{x}$. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Unité graphique $5cm$.*

❶ *Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$. Déterminer les asymptotes de $\mathcal{C}$.*

❷ *Dresser le tableau des variations de f.*

a) *Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $[\frac{1}{e}; 1]$ une unique solution notée α.*

b) *Déterminer un encadrement de α à 10^{-1}.*

c) *Donner suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$ sur $]0; +\infty[$.*

❸ *Tracer la courbe $\mathcal{C}$.*

Exercice 13. ❶ *Etudier le signe de $\ln x$.*

❷ *Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x}$.*

On définit sur $]0; +\infty[$ $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

❸ *Déterminer la limite de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat.*

❹ *Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.*

❺ **a)** *Etudier la dérivabilité de f et calculer $f'(x)$.*

b) *Dresser le tableau de variation de f.*

❻ **a)** *Montrer que l'équation $f(x) = 0$ une solution α unique sur $]0; +\infty[$.*

b) *Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.*

❼ *Tracer $\mathcal{C}$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.*