République Du Cameroun-MINESEC
Lycée Bilingue De Babadjou
Année Scolaire: 2021/2022
Classe: $T^{le}\,C$
Examinateur: *M. TCHOFFO JEAN*

Examen: *Devoir surveillé* N°4
Épreuve: *Mathématiques*
Session de: *Janvier* 2022
Durée: 04 *heures* - **Coeff:** 07
Évaluation 3^{me} **Séquence**

La qualité de la rédaction, la présentation et la clarté des raisonnements entrerons pour une part importantes dans l'appréciation des copies.

ÉVALUATION DES RESSOURCES: [15.5*pts*]

EXECICE 1. [4 *points*]

$I-$ On appelle hauteur d'un tétraèdre toute droite contenant l'un des sommets de ce tétraèdre et perpendiculaire au plan de la face opposée à ce sommet. Un tétraèdre est orthocentrique si ses 4 hauteurs sont concourantes.

1. On considère un tétraèdre $ABCD$ et on note H le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).

   Démontrer que, si les hauteurs du tétraèdre $ABCD$ issues des points A et B sont concourantes, alors la droite (BH) est une hauteur du triangle BCD. [1 *pt*]

2. Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ on donne les points $A\,(3;2;-1)$; $B\,(-6;1;1)$; $C\,(4;-3;3)$ et $D\,(-1;-5;-1)$

   a) Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BCD) est: $-2x-3y+4z-13=0$. [0.5 *pt*]

   b) Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD). [0.5 *pt*]

   c) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CD}$. [0.5 *pt*]

   d) Le tétraèdre $ABCD$ est-il orthocentrique? [0.5 *pt*]

$II-$ Soit $ABCD$ un losange de centre O avec $OB = 2\,OA$.

1. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}\right)\cdot\left(2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)=0$. [0.5 *pt*]

2. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2+MC^2-2MD^2=-6OA^2$. [0.5 *pt*]

EXECICE 2. [4 *points*]

On considère la fonction numérique f définie sur $\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$ par: $f(x)=\frac{\pi}{2}-\sin(x)$.

Soit (μ_n) une suite définie par: $\begin{cases}\mu_0\in\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[\\ \mu_{n+1}=f(\mu_n)\end{cases}$.

1. Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans $\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$. [0.5 *pt*]

2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\frac{\pi}{6}<\mu_n<\frac{\pi}{2}$. [0.75 *pt*]

3. *a*) Montrer que pour tout $x\in\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$, $|f'(x)|\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$. [0.5 *pt*]

   b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|\mu_{n+1}-\alpha|\leq\frac{\sqrt{3}}{2}|\mu_n-\alpha|$. [0.5 *pt*]

4. Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|\mu_n-\alpha|\leq\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n|\mu_0-\alpha|$ [1.5 *pt*]

5. Déterminer la limite de la suite (μ_n). [0.25 *pt*]

EXECICE 3. [4 *points*]

Les questions sont indépendantes.

1. Montrer que $\forall (k;n) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$ avec $k \leq n$; $k \wedge n = 1 \Longrightarrow n / C_n^k$. [0.5 *pt*]
2. Monter que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$; $(n+1) / C_{2n}^n$ (Indication: Exprimer C_{2n}^{n+1} en fonction de C_{2n}^n). [0.5 *pt*]
3. Soit $(a;b;c) \in (\mathbb{Z}^\star)^3$. En utilisant le théorème de Gauss, montrer que $a \wedge b = 1 \Longrightarrow a \wedge (b \times c) = a \wedge c$. [0.5 *pt*]
4. Soit (ν_n) la suite définie par: $\begin{cases} \nu_0 = 0; \quad \nu_1 = 1 \\ \nu_{n+2} = \nu_{n+1} + \nu_n \end{cases}$ (*Suite de FIBONACCI*).
   - *a*) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\nu_{n+1} \times \nu_{n-1} - \nu_n^2 = (-1)^n$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\nu_n \wedge \nu_{n+1} = 1$. [1.5 *pt*]
   - *b*) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\nu_{m+n} = \nu_m \times \nu_{n+1} + \nu_{m-1} \times \nu_n$. [0.5 *pt*]
   - *c*) En déduire que $\nu_m \wedge \nu_n = \nu_{m \wedge n}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^\star$. [0.5 *pt*]

EXECICE 4. [3.5 *points*]

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante: $(E): \; z^3 - (4+i) z^2 + (13+4i) z - 13i = 0$.

1. *a*) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on précisera. [0.5 *pt*]
   - *b*) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). [0.5 *pt*]
2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé directe $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points $A(i)$; $B(2+3i)$ et $C(2-3i)$.
   - *a*) Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Déterminer l'affixe du point $A' = r(A)$. [0.75 *pt*]
   - *b*) Montrer que les points A', B et C sont alignés [0.5 *pt*]
   - *c*) Déterminer l'écriture complexe de l'homothétie h de centre B et qui transforme le point C en A'. [0.5 *pt*]
   - *d*) Vérifier que $h^{-1} \circ r(A) = C$, puis déterminer l'écriture complexe de l'application $h^{-1} \circ r$. [0.75 *pt*]

<u>ÉVALUATION DES COMPÉTENCES:</u> [4.5*pts*]

Une moto placée à un point M se déplace sur une route notée (d). Marie décide d'étudier son mouvement sur un intervalle de 0 à $4h$ de temps. L'abscisse de la moto à l'instant t est donnée par: $f(t) = -t^3 + t^2 + 8t + 1$ sa vitesse par $v(t) = f'(t)$ et son accélération par $a(t) = v'(t) = f''(t)$.

Marie se rappelle que sur un intervalle de temps, le mouvement est accéléré si $v(t) \times a(t) \geq 0$ et retardé si $v(t) \times a(t) \leq 0$.

<u>Tâche 1</u> Démontrer que l'abscisse de M est nulle à un unique $t_0 \in [0;4]$ (vous préciserez exactement l'intervalle de deux nombres consécutifs où t_0 appartient). [1.5 *pt*]

<u>Tâche 2</u> Déterminer l'abscisse et l'accélération de la moto à l'instant où sa vitesse est maximale. [1.5 *pt*]

<u>Tâche 3</u> Déterminer les intervalles sur lesquels le mouvement de la moto est accéléré ou retardé. [1.5 *pt*]

<u>Présentation</u> [1 *pt*]

« Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve.» ***Euclide d'Alexandrie***