COURS DE MATHEMATIQUES PCD

RAPPELS DES NOTIONS ANTERIEURES

I- Trigonométrie

1-1. Lignes trigonométriques des angles remarquables

Le tableau ci-dessous indiquent les lignes trigonométriques des angles remarquables à retenir

A	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non définie	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Pour tout nombre réel α, on a :

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1\,;\ -1 \leq \cos\alpha \leq 1$ et $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$

1-2. Lignes trigonométriques d'angle associes

Formules de symétries

Propriétés :

Pour tout nombre réel α, on a :

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha\ ;\ \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha\ ;\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha\ ;\ \sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha\ ;\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha\ ;\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha\ ;\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$

Si de plus $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ on a :

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha\,;\ \tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha\ ;\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$

Rédigé par Ir. KPADJOUDA Rodrigue contact : 96813262

Si de plus $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ on a :

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan\alpha}$; $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{\tan\alpha}$

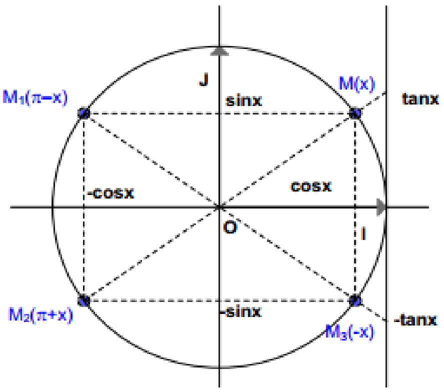


FIG 1 : Images de x, -x, $\pi - \alpha$ et $\pi + \alpha$

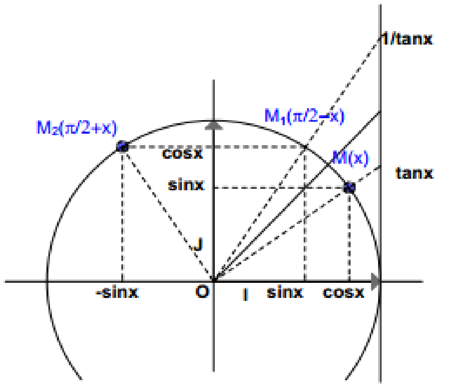


FIG 2 : Images de x, -x,$\frac{\pi}{2} - \alpha$ et $\frac{\pi}{2} + \alpha$

1-3. Formules de trigonométrie

1-3.1. Formules d'addition

Propriété :

Pour tous nombres réels a et b on a :

$\text{Cos}(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$;

$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$;

$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

1-3.2. Formules de duplication et de linéarisation

Propriété :

Pour tout nombre réel α, on a :

Formules de duplication

$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

Formule de linéarisation

$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$; $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$

1-3.3. Sommes différences et produits des fonctions circulaires

Pour tous nombres réels a et b, on a :

$\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2\cos(a)\cos(b)$

$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\sin(a)\sin(b)$

$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin(a)\cos(b)$

$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\sin(b)\cos(a)$

2- Équations trigonométriques

2-1. Equation de la forme $\cos x = \cos \alpha$

Propriété :

Pour tous nombres réels x et α, on a :

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = -\alpha + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Conséquence :

On en déduit que $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

2-2. Equation de la forme $\sin x = \sin \alpha$

Propriété :

Pour tous nombres réels x et α, on a :

$$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = (\pi - \alpha) + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Conséquence :

On en déduit que $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

2-3. Equation de la forme $a\cos x + b\sin x = c$

Propriété :

Pour tous nombres réels a et b non nuls, on a :

- $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$
- $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$
- Il existe un nombre θ tel que : $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$
- $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta\cos x + \sin\theta\sin x)$
- $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\,\cos(x-\theta)$
- $a\cos x + b\sin x = c$ équivaut à : $\cos(x-\theta) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$
- $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\begin{cases} \text{si } n \text{ est pair, la mesure principale de } (n\pi) \text{ est } 0 \\ \text{si } n \text{ est impair, la mesure principale de } (n\pi) \text{ est } \pi \end{cases}$

3- Identités remarquables

On obtient les identités remarquables suivantes par simple développement. Elles servent à développer des expressions factorisées ou à factoriser des expressions développées.

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$; $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

4- Polynômes du second degré

4-1- Définition

Un polynôme P de degré 2 en x est défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c trois nombres réels tels que $a \neq 0$. Il est aussi appelé trinôme du second degré.

4-2- Forme canonique

Un polynôme P défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c trois réels et $a \neq 0$.

La forme canonique de P(x) est : $P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

Le nombre,Δ, defini par : $\Delta = b^2 - 4ac$; est appelé le discriminant de P.

La forme canonique de P(x) devient alors : $P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

4-2- Factorisation et résolution d'équations

Propriétés

Soit le discriminant du polynôme du second degré à coefficients réels défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$

- Si $\Delta > 0$, on a :
  $P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]$
  $P(x) = a\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$
  P a deux racines réelles distinctes : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
  $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

- Si $\Delta = 0$, on :
  $P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$
  $P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right)$
  P a une racine réelle double : $x_0 = \frac{-b}{2a}$
  $P(x) = a(x - x_0)^2$
- Si $\Delta < 0$ alors P n'a pas de racine réelle et n'est pas factorisable en produit de deux facteurs de degré 1 à coefficients réels.

4-4- Signe d'un trinôme

On se propose de déterminer le signe de $P(x) = ax^2 + bx + c$ suivant les valeurs de x avec $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.

Théorème

Soit $P : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) un trinôme du second degré à coefficients réels et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- Si $\Delta > 0$, $P(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines $(x_1 < x_2)$ et du signe contraire à l'intérieur.

X	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
P(x)		Signe de a	0	Signe de -a	0	Signe de a	

- Si $\Delta = 0$, $P(x)$ est du signe de a et s'annule en $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

X	$-\infty$		x_0		$+\infty$
P(x)		Signe de a	0	Signe de a	

- Si $\Delta < 0$, $P(x)$ est du signe de a.

X	$-\infty$		$+\infty$
P(x)		Signe de a	

5. Zéro d'un polynôme P.

5.1. Propriété :

Un nombre réel x_0 est un zéro (ou une racine) d'un polynôme P lorsque $P(x_0) = 0$

5.2. Propriété :

Si x_0 est un zéro d'un polynôme P de degré n $(n \geq 2)$, alors il existe un polynôme Q de degré $n - 1$ tel que pour tout x élément de R, $P(x) = (x - x_0)Q(x)$.

<u>Séquence 1</u> : Vecteurs de l'espace - repérage d'un point de l'espace.

1- Vecteurs de l'espace

On étend la notion de vecteur du plan à l'espace. Les définitions et propriétés sur les vecteurs dans le plan restent valables dans l'espace :

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow$ ABCD est un parallélogramme
- On définit l'addition de deux vecteurs et le produit d'un vecteur par un nombre réel dans l'espace de la même manière que dans le plan.
- Relation de Chasles : pour tous points A, B et C de l'espace on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{u} = \lambda\vec{v}$
- A, B, C alignés $\Leftrightarrow \exists\ k \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$
- (AB) // (CD) $\Leftrightarrow \exists\ k \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$
- $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ coplanaires $\Leftrightarrow \exists\ (a, b) \in \mathbb{R}^2, \vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$
- A, B, C et D coplanaires $\Leftrightarrow \exists\ (a, b) \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$

2- Bases et repères de l'espace

W est l'ensemble des vecteurs de l'espace

- Une base de W est tout triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{t})$ de vecteurs non coplanaires de W
- Soit O, I, J et K quatre points non coplanaires de l'espace alors $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$ est une base de W. Dans ce cas chacun des quadruplets $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$ et (O, I, J, K) est appelé un repère de l'espace et le triplet (x, y, z) de réels tels que l'on ait $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ} + z\overrightarrow{OK}$ est appelé triplet de coordonnées du point M dans le repère (O, I, J, K) on note $M(x, y, z)$

<u>Séquence 2</u> : Barycentre de n points pondérés ($\mathbf{n} \in \mathbb{N}, \mathbf{n} \geq \mathbf{2}$).

Définitions :

D1 : Un point pondéré est un couple (A, r) où A est un point et r un nombre réel, appelé coefficient.

D2 : Un système de points pondérés est une collection de points pondérés dans laquelle un même point pondéré peut apparaitre plusieurs fois.

D4 : Soit $(A_i , \alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ n points pondérés. On pose $m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.

➢ Si m=0, alors les points $(A_1 , \alpha_1), (A_2 , \alpha_2) \ldots, (A_n , \alpha_n)$ n'ont pas de barycentre.

➢ Si $m \neq 0$, On appelle Barycentre des points pondérés $(A_i , \alpha_i)_{1\leq i\leq n}$, l'unique point G tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\overrightarrow{GA_i} = \vec{O}$ et on note G=Bar $\{(A_i , \alpha_i)\}_{1\leq i\leq n}$

Si de plus tous les coefficients sont égaux, ont dit que G est l'isobarycentre des points $(A_i , \alpha_i)_{1\leq i\leq n}$

Rédigé par Ir. KPADJOUDA Rodrigue contact : 96813262

Propriété :

P1 : Le barycentre de plusieurs points pondérés ne change pas lorsqu'on multiplie tous les coefficients par un même nombre réel non nul. (C'est homogénéité du barycentre)

P2 : Coordonnées du barycentre.

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.Soit $(A_i , \alpha_i)_{1 \le i \le n}$ n points pondérés et G leur barycentre. Si (x_i, y_i, z_i) sont les coordonnées du point $A_i (1 \le i \le n)$ et (x ; y ; z) celles de G, alors

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \; ; y = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \; ; z = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}.$$

P3 : Propriété d'associativité

On ne change pas le barycentre de n points pondérés $(n \ge 3)$ en remplaçant p d'entre eux $(1 < p < n)$, dont la somme des coefficients est non nulle, par leur barycentre partiel affecté de cette somme.

Exemple

I°) Si G=Bar {(A, 1) ;(B,-3), (C, 4), (D, 2)} alors G=Bar {(A, 2) ;(B,-6) ;(C,8) ;(D,4)}

II°) Calculer les coordonnées du barycentre G de l'exemple précédent. On donne A(0 ;1 ;1), B(0 ;0 ;1), C(1 ;0 ;0), D(0 ;1 ;0).

Solution :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \; ; x_G = \frac{1x_A - 3x_B + 4x_C + 2x_D}{1-3+4+2} = \frac{1(0)-3(0)+4(1)+2(0)}{4} = \frac{4}{4} \; ; x_G = 1$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \; ; y_G = \frac{1y_A - 3y_B + 4y_C + 2y_D}{1-3+4+2} = \frac{1(1)-3(0)+4(0)+2(1)}{4} = \frac{3}{4} \; ; y_G = \frac{3}{4}$$

$$z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \; ; z_G = \frac{1z_A - 3z_B + 4z_C + 2z_D}{1-3+4+2} = \frac{1(1)-3(1)+4(0)+2(0)}{4} = \frac{-2}{4} \; ; z_G = \frac{-1}{2}$$

Remarques

Soit A, B, C, D quatre points qui ne sont pas dans un même plan.

(1) L'ensemble des barycentres des points A et B est la droite (AB).

(2) L'ensemble des barycentres des points A, B et C est le plan (ABC).

(3) L'ensemble des barycentres des points A, B, C et D est l'espace.

Séquence 3 : Produit scalaire

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

Définition :

On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ (x; y; z) et $\vec{u}$ (x'; y'; z') le réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ et défini par l'une des trois relations suivantes :

1) $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}[||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2]$

2) $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

3) $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \cos(\vec{u}, \vec{v})$

NB : $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ dans un repère orthonormé.

Propriétés :
Pour trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de l'espace et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- $\vec{u}.(\vec{w} + \vec{v}) = \vec{u}.\vec{w} + \vec{u}.\vec{v}$ et $(a\vec{u}).(b\vec{v}) = ab(\vec{u}.\vec{v})$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens alors : $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraire alors : $\vec{u}.\vec{v} = -||\vec{u}||.||\vec{v}||$.
- On appelle $\theta = mes(\widehat{BAC})$, on a alors :

  Si $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} > 0$.

  Si $\theta = \frac{\pi}{2}$ alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$, ABC est alors rectangle en A.

  Si $\theta > \frac{\pi}{2}$ alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} < 0$

Séquence 4 : Représentations paramétriques et équations cartésiennes : Droites et plans.

1- Droite dans l'espace :

Représentation paramétrique d'une droite :
L'espace est muni d'un repère.
Soit une droite (D) passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$, on appelle représentation paramétrique de la droite (D), le système d'équations paramétriques suivant : $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$, (x, y, z) étant le triplet de coordonnées d'un point quelconque M de (D)

Système d'équations cartésiennes d'une droite

Propriété :
-Toute droite de l'espace est caractérisée par un système de deux équations cartésiennes de plans de la forme $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$

-Si $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont les équations cartésiennes respectives de deux plans sécants, alors $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ est un système d'équations cartésiennes de la droite d'intersection de ces deux plans.

Si (D) est la droite passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$ alors un système d'équations cartésiennes de D est

- $\frac{x-x_A}{a} = \frac{y-y_A}{b} = \frac{z-z_A}{c}$, Si $a \neq 0, b \neq 0$ et $c \neq 0$
- $\begin{cases} \frac{x-x_A}{a} = \frac{y-y_A}{b} \\ z = z_A \end{cases}$, Si $a \neq 0, b \neq 0$ et $c = 0$
- $\begin{cases} y = y_A \\ z = z_A \end{cases}$ Si $a \neq 0, b = 0$ et $c = 0$

N.B. : On obtient des systèmes analogues lorsque : ($a = 0, b \neq 0$ et $c = 0$), ($a = 0, b = 0$ et $c \neq 0$), ($a \neq 0, b = 0$ et $c \neq 0$), ($a = 0, b \neq 0$ et $c \neq 0$).

2- Plan dans l'espace :

Représentation paramétrique d'un plan

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

Soit un plan P passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(a; b; c)$, et $\vec{v}(a', b', c')$, on appelle représentation paramétrique du plan(P), le système d'équations paramétriques suivant : $\begin{cases} x = x_A + at + a't' \\ y = y_A + bt + b't' \\ z = z_A + ct + c't' \end{cases}$, $(t, t') \in \mathbb{R}^2$; (x, y, z) étant le triplet de coordonnées d'un point quelconque M de (P).

Equation cartésienne d'un plan

Définition

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

Soit (P) un plan de l'espace passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ et $M(x, y, z)$ un point de (P).

Une équation cartésienne de (P) est : $ax + by + cz + d = 0$

avec $d = -ax_A - by_A - cz_A$

Propriété :

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

Soit a, b et c trois nombres réels tels que $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$.

-Tout plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

-Toute équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ est celle d'un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

3- Positions relatives de droites et plans.

Positions relatives de deux droites

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

Soit (D) et (D') deux droites de repères respectifs $(A, \vec{u})$ et $(B, \vec{v})$.

- (D) et (D') sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- (D) et (D') sont orthogonales si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Positions relatives d'une droite et d'un plan

Soit (D) une droite de repère $(A, \vec{u})$ et (P) un plan de de vecteur normal $\vec{n}$.

- (D) et (P) sont parallèles si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$
- (D) et (P) sont sécants si et seulement si (D) et (P) ne sont pas parallèles.
- (D) et (P) sont perpendiculaires si seulement si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

Positions relatives de deux plans

Soit (P) un plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ et (Q) un plan passant par B et de vecteur normal $\vec{n}'$.

- (P) et (Q) sont parallèles si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires.
- (P) et (Q) sont sécants si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires.
- (P) et (Q) sont perpendiculaires si seulement si $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$.

Séquence 6 : Produit Vectoriel.

1- Orientation de l'espace

Soit $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k}\right)$ un repère de l'espace tels que $\vec{k}$ soit orthogonal à chacun des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$. On considère les points I, J et K définis par $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$,

$\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$.

Considérons un observateur débout le long de l'axe $(O, \vec{k})$, les pieds en O et la tete vers le point K fixant le point I.

Deux cas sont possibles.

- Si le point J est à gauche de l'observateur, on dit que le **repère** $\left(O\ ; \overrightarrow{OI}\ ; \overrightarrow{OJ}\ ; \overrightarrow{OK}\right)$ est **direct** et que la **base** $\left(\overrightarrow{OI}\ ; \overrightarrow{OJ}\ ; \overrightarrow{OK}\right)$ est **directe**
- Si le point J est à droite de l'observateur, on dit que le **repère** $\left(O\ ; \overrightarrow{OI}\ ; \overrightarrow{OJ}\ ; \overrightarrow{OK}\right)$ est **indirect** et que la **base** $\left(\overrightarrow{OI}\ ; \overrightarrow{OJ}\ ; \overrightarrow{OK}\right)$ est **indirecte**

Orienter l'espace, c'est pouvoir distinguer ces deux types de repères.

Remarque

Les bases de l'espace ou des plans s'orientent de la même façon que les repères.

2- Définition :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté W ; A, B et C des points de l'espace tels que : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le vecteur, noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$ défini comme suit :

- Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0}$
- Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires et le vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}\wedge\vec{v})$ est une base directe de W et $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\mathrm{Sin}(B\widehat{A}C)$
- $\vec{u}\wedge\vec{v}$ se lit « $\vec{u}$ vectoriel $\vec{v}$ »

NB : Si $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k}\right)$ est une base orthonormée directe de W alors

$\vec{i}\wedge\vec{j} = \vec{k}, \vec{j}\wedge\vec{k} = \vec{i}$ et $\vec{k}\wedge\vec{i} = \vec{j}$

<u>**Propriétés du produit vectoriel**</u>

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{w}$ et $\vec{v}$ de W, pour tout nombre réel k, on a :

(1) $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

(2) $\vec{u}\wedge\vec{v} = -(\vec{v}\wedge\vec{u})$; (3) $(k\vec{u})\wedge\vec{v} = \vec{u}\wedge(k\vec{v}) = k(\vec{u}\wedge\vec{v})$

(4) $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\wedge\vec{v} + \vec{u}\wedge\vec{w}$; (5) $(\vec{u}+\vec{v})\wedge\vec{w} = \vec{u}\wedge\vec{w} + \vec{u}\wedge\vec{w}$

<u>**Expression analytique du produit vectoriel**</u>

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit les vecteurs $\vec{u}$ (x; y; z) et $\vec{u}$ (x'; y'; z'). Les coordonnées du produit vectoriel $\vec{u}$ par $\vec{v}$ sont données par les déterminants : $\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.

Alors on a : $\vec{u} \wedge \vec{v} \left(\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\right)$ soit

$\vec{u} \wedge \vec{v}\ (yz' - zy'; zx' - xz'; xy' - yx')$

3- Distance d'un point à une droite, à un plan

Soit (D) une droite de repère $(A, \vec{u})$, (P) un plan de repère $(B, \vec{u}\,\vec{v})$ et M un point de l'espace.

1) La distance du point M à la droite (D) est donnée par la formule :

$d\,(M, (D)) = \frac{\|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \times u.l$

2) La distance du point M au plan (P) est donnée par la formule :

$d(M,(P)) = \frac{|\overrightarrow{MA}.(\vec{u} \wedge \vec{v})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} \times u.l$

Si (P) est défini par son équation cartésienne de la forme

$ax + by + cz + d = 0$

$d(M, (P)) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \times u.l$

u.l : unité de longueur

4- Calculs d'aire et de volume

Soit ABCD un tétraèdre et V son volume.

1) L'aire de la surface du triangle ABC en unité d'aire, est donnée par la formule :

$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \times u.a = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}\| \times u.a = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AC}\| \times u.a$

Avec u.a= $(u.l)^2$: Unité d'aire si le repère est orthonormé.

2) L'aire de la surface du parallélogramme ABCD en unité d'aire, est donnée par la formule :

$$\mathcal{A} = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \times u.a\,.$$

3) Le volume du tétraèdre ABCD est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})\right| \times u.v$$

$u.v = (u.a) \times (u.l)$: Unité de volume

<u>NB</u> : Quatre points de l'espace A, B, C et D sont non coplanaires (définissent un tétraèdre) lorsque que : $\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \neq 0$

5- <u>Perpendiculaire commune à deux droites</u>

<u>Définition :</u> Soient (D) et (D') deux droites non parallèles, il existe une unique droite (Δ) perpendiculaire à la fois à (D) et à (D'). Cette droite est appelée perpendiculaire commune aux deux droites (D) et à (D). Si de plus (D) est dirigée par $\overrightarrow{u'}$ et si (D') est dirigée $\overrightarrow{u'}$par alors (Δ) est dirigée par $\vec{u} \wedge \overrightarrow{u'}$.

Méthode pour déterminer la perpendiculaire commune à deux droites

Dans l'espace muni d'un repère ortho normal direct, on considère deux droites non coplanaires (D) et (D') telles que

– (D) est dirigée par le vecteur $\vec{u}$ et passe par le point A

– (D') est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u'}$ et passe par le point A'

Pour déterminer une équation cartésienne d'une perpendiculaire commune à (D) et (D'):

1- On détermine le vecteur $\vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{u}'$

2 -On détermine une équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ du plan (P) passant par A et engendré par $\vec{v}$ et $\vec{u}$. Ce plan contient (D).

3 -On forme une équation cartésienne $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ du plan (P') passant par A et dirigé par $\vec{v}$ et $\vec{u}'$. Ce plan contient (D').

4- L'intersection de (P) et de (P') est une droite (Δ) dirigée par $\vec{v}$. Par construction, cette droite est la perpendiculaire commune à (D) et à (D'). Un système d'équations cartésiennes pour (Δ) est donc :

$$(\Delta): \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

6- LIGNES DE NIVEAU (Ensembles de points)

Récapitulatif

On pose I=Bar {(A, 1) ;(B, a)} et J=Bar {(A, 1) ;(B, -a)}

Ensemble	Nature		
	Droite	Plan	Espace
$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \vec{0}$			Droite de repère $(A, \vec{u})$
$\overrightarrow{AM}.\vec{u} = a (a \in \mathbb{R})$	Un singleton.	Droite (D) de vecteur normal $\vec{u}$ (A∈ (D) si a=0)	Plan (P) de vecteur normal $\vec{u}$ (A∈ (D) si a=0)
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$	M=A ou M=B	Cercle de diamètre [AB]	Sphère de diamètre [AB]
$\frac{MA}{MB} = a \ (a \in]0;1[\cup]1;+\infty[)$	Bipoints	Cercle de diamètre [IJ]	Sphère de diamètre [IJ]
$MA = a \ (a > 0)$	Bipoints	Cercle de centre A et de rayon a	Sphère de centre A et de rayon a

Séquence 1 : Nombres complexes.

Définition :

On appelle nombre complexe écrit sous la forme algébrique, tout nombre de la forme $z = a + ib$,tel que a et b sont des nombres réels et $i^2 = -1$.

- ✓ a est appelé partie réelle de z et est notée $\Re e(z)$
- ✓ b est appelé partie imaginaire de z et est notée $\Im m(z)$
- ✓ L'écriture $z = a + ib$ est appelée forme algébrique de z

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Propriété :

Soit z et z' deux nombres complexes. On a :

- ❖ $z = 0 \Leftrightarrow \Re e(z) = 0$ et $\Im m(z) = 0$
- ❖ $z = z' \Leftrightarrow \Re e(z) = \Re e(z')$ et $\Im m(z) = \Im m(z')$
- ❖ z est réel $\Leftrightarrow \Im m(z) = 0$
- ❖ z est imaginaire $\Leftrightarrow \Re e(z) = 0$
- ❖ z est imaginaire pure $\Leftrightarrow \Re e(z) = 0$ et $\Im m(z) \neq 0$

Opérations dans $\mathbb{C}$

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes tels que $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(a', b') \in \mathbb{R}^2$

- ❖ $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
- ❖ $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$
- ❖ $\frac{1}{z} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$, avec $z \neq 0$
- ❖ $\frac{z'}{z} = \frac{(a'+ib')(a-ib)}{a^2+b^2} = \frac{(aa'+bb')+i(ab'-a'b)}{a^2+b^2}$
- ❖ $zz' = 0$ si et seulement si ($z = 0$ ou $z' = 0$)
- ❖ $z - z' = (a - a') + i(b - b')$
- ❖ $(z + z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2$
- ❖ $(z - z')^2 = z^2 - 2zz' + z'^2$
- ❖ $(z + z')(z - z') = z^2 - z'^2$
- ❖ $(z + z')^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n z^k z'^{n-k}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$.
  (C'est la formule du binôme de Newton).

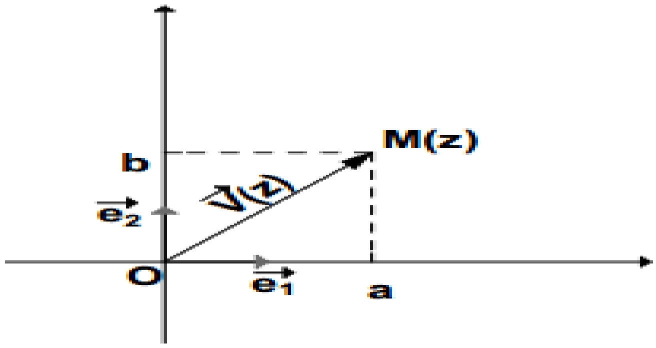
Représentation géométrique d'un nombre complexe

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

A tout nombre complexe $z = a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on peut associer le point M(a ; b).

Le point M(a ; b) est appelé **point-image** du nombre complexe z. Le nombre complexe $z = a + ib$ est appelé **affixe** du point M(a ; b). On note **M(z)** le point d'affixe z.

On peut également associer à chaque nombre complexe $z = a + ib$ le vecteur $\vec{v}(a\,;\,b)$. Ce vecteur est appelé le **vecteur-image** du nombre complexe z. On note $\vec{\mathbf{v}}(\mathbf{z})$ le vecteur-image de z.



Le point M(z) est **la représentation géométrique** de z dans le plan P et le vecteur $\vec{v}(z)$ est la représentation géométrique de z dans l'ensemble des vecteurs du plan P.

Le plan P muni d'un repère orthonormé et utilisé pour représenter géométriquement les nombres complexes est appelé **plan complexe**.

L'axe des abscisses est appelé axe des réels et celui des ordonnés axe des imaginaires purs

Remarques

Soit A et B deux points du plan complexe, d'affixes respectives z_A et z_B

- L' affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$
- L'affixe du milieu de [AB] est $\frac{z_A+z_B}{2}$
- L'affixe de l'isobarycentre des points A, B et C est $\frac{z_A+z_B+z_C}{3}$
- Soit α et β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$. L'affixe de G barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β) est égale à $z_G = \frac{\alpha z_A+\beta z_B}{\alpha+\beta}$

<u>Conjugué et module d'un nombre complexe :</u>

- Conjugué d'un nombre complexe

<u>Définition :</u>

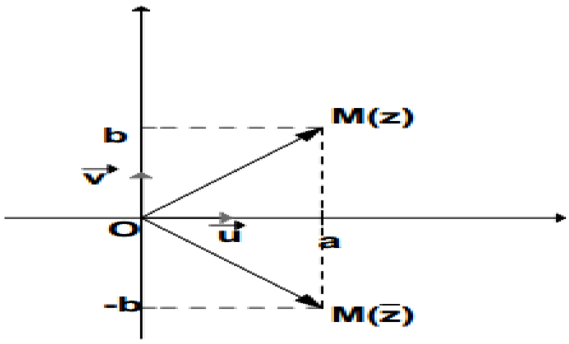
Soit z un nombre complexe tel que: $z = a + ib\,;\; (a\,,b) \in \mathbb{R}^2$et $i^2 = -1$

On appelle conjugué de z le nombre complexe noté $\bar{z}$, tel que : $\bar{z} = a - ib$.

<u>Interprétation géométrique</u>

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Les points M et M' d'affixes respectives z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe réel.(appuyez par une figure)



Propriétés :

- z est réel $\Leftrightarrow z = \bar{z}$
- z est imaginaire $\Leftrightarrow (z = -\bar{z})$.
- z est imaginaire pure $\Leftrightarrow$ $(z = -\bar{z}$ et $z \neq 0)$
- $\bar{\bar{z}} = z$
- $z + \bar{z} = 2\Re e(z)$
- $z - \bar{z} = 2i\,\Im m(z)$
- $z\bar{z} = [\Re e(z)]^2 + [\Im m(z)]^2$
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
- $\overline{-z} = -\bar{z}$
- $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z'}$
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ (si $z \neq 0$)
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ (si $z' \neq 0$)
- $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ (si $z \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$)

Module d'un nombre complexe :

Définition :

Soit z un nombre complexe tel que : $z = a + ib$.

$(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $i^2 = -1$.

On appelle module de z le nombre réel positif, noté $|z|$, tel que

$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Interprétation géométrique

Le plan complexe est muni d'un repère $(o;\ \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

✓ Si z est l'affixe d'un point M alors $|z| = OM$
✓ Si z est l'affixe d'un vecteur $\vec{u}$, on a $|z| =: \|\vec{u}\|$
✓ Si z_A et z_B sont les affixes respectives de deux points A et B on a : $|z_B - z_A| = AB$

Propriétés :

Pour tous nombres complexes z et z', pour tout entier relatif n, on a :

- $|zz'| = |z| \times |z'|$

- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ (si $z \neq 0$)
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$(si $z' \neq 0$)
- $|z^n| = |z|^n$(si $z \neq 0$)
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (c'est l'inégalité triangulaire)

Etude trigonométrique

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(o; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

- **Argument d'un nombre complexe non nul.**

Définition :

Soit z un nombre complexe non nul et M son point-image dans le plan complexe.

On appelle argument de z toute mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM})$.

Tout nombre complexe non nul possède plusieurs arguments.

Si θ et θ' sont deux arguments de z, on a : $\theta = \theta' + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

On note $\arg(z) = \theta + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$

Interprétation géométrique

- ✓ Si z est l'affixe d'un vecteur non nul $\vec{u}$, $\arg(z)$ représente les mesures de l'angle orienté $(\overrightarrow{e_1}, \vec{u})$.
- ✓ Si z_A et z_B sont les affixes respectives de deux points distincts A et B, $\arg(z_B - z_A) = \text{mes}\,(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB}) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

- **Forme trigonométrique**

Définition :

Soit z un nombre complexe non nul de module **r** et d'argument $\boldsymbol{\theta}$.

On appelle forme trigonométrique de z l'écriture : $z = \mathbf{r}(\cos \boldsymbol{\theta} + i \sin \boldsymbol{\theta})$.

Propriétés :

Pour tous nombres complexes z et z' non nuls, pour tous entiers relatifs k et n, on a :

- $z = z'$ si et seulement si $|z| = |z'|$ et $\arg(z) = \arg(z') + 2k\pi$
- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- $\arg(z^n) = n \arg(z) + 2k\pi$; $n \neq 0, k \in \mathbb{Z}$
- $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi$; $z \neq 0, k \in \mathbb{Z}$

Formule de Moivre

Propriété :

Pour tout nombre réel θ et pour tout entier relatif n, on a :

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$

Forme exponentielle d'un nombre complexe

Définition :

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ.

On appelle forme exponentielle de z l'écriture : $z = \mathbf{r}\, e^{i\theta}$.

Propriétés :

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls tels que $z = \mathbf{r}e^{i\theta}$ et $z = \mathbf{r}'e^{i\theta'}$, n un entier relatif, **r et r'** sont deux réels strictement positifs on a :

- $zz' = \mathbf{rr}'e^{i(\theta+\theta')}$
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$
- $z^n = r^n e^{in\theta}$
- $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$.

Formule d'Euler

Propriété :

Pour tout nombre réel θ, on a : $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Racines n-ièmes d'un nombre complexe.

Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

On appelle racine n-ièmes de Z tout nombre complexe z tel que : $z^n = Z$.

a) Détermination d'une racine nième $(n \in \mathbb{N}/n \geq 2)$.

Soit $u = |u|\, e^{i\theta}$ tel que $u \in \mathbb{C}^*$; $z \in \mathbb{C}$ et $z^n = u$

Posons $z = re^{i\alpha}$; on a $z^n = r^n e^{in\alpha}$

$$z^n = u \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = |u| \\ n\alpha = \theta + 2k\pi \,;\, k \in (0; 1; \ldots; n-1) \end{cases}$$

$$z_k = \sqrt[n]{|u|}e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \text{ avec } k \in (0; 1; \ldots; n-1)$$

Retenons :

Les racines $n^{\text{ièmes}}$ $(n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2)$ d'un nombre complexe non nul Z tel que $Z = re^{i\theta}(r \in \mathbb{R}_+^*, \theta \in \mathbb{R})$ sont les nombres complexes

$$z_k = \sqrt[n]{|u|}e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)} \text{ avec } k \in (0; 1; \ldots; n-1)$$

Equation du second degré dans $\mathbb{C}$.

Rédigé par Ir. KPADJOUDA Rodrigue contact : 96813262

a) Détermination d'une racine carrée u

Soit $Z = x + iy$ et $u = a + ib$ tel que $z^2 = u$, avec

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

On a $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$.

$$\text{Donc } z^2 = u \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = \Re e(u) \\ x^2 + y^2 = |u| = |z^2| \\ xy \text{ a même signe que } \Im m(u) \end{cases} \quad (S)$$

Déterminer z revient à résoudre le système (S).

Résolution d'équation du second degré :

Soit l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b et des nombres complexes tels que $a \neq 0$ et Δ son discriminant. $\Delta = b^2 - 4ac$.

- ✓ Si $\Delta < 0$ alors l'équation admet deux solutions complexes z_1 et z_2 telles que $z_1 = \frac{-b-\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\sqrt{-\Delta}}{2a}$.
- ✓ Si $\Delta = 0$ alors l'équation une solution réelle double $z_0 = \frac{-b}{2a}$.
- ✓ Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux solutions réelles z_1 et z_2 telles que $z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- ✓ Si $\Delta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on determine une racine carrée δ de Δ. L'équation admet deux solutions z_1 et z_2 telles que $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$.

b) Nombres complexes et configurations planes.

Soient $A(z_A)$; $B(z_B)$;$C(z_C)$ et $D(z_D)$ quatre points du plan complexe.

Configuration	Caractérisation complexe
$AB = CD$	$\lvert z_B - z_A \rvert = \lvert z_D - z_C \rvert$
$\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overrightarrow{\mathbf{CD}}$	$z_B - z_A = z_D - z_C$
ABCD un parallélogramme	$z_B - z_A = z_C - z_D$
Points A, B, C alignés	$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbf{R}^*$
Triangle ABC rectangle en A	$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = bi$, avec $b \in \mathbf{R}^*$
Triangle ABC isocèle en A	$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{\mp i\alpha}$, $\alpha \neq k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$
Triangle ABC rectangle et isocèle en A	$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \pm i$, avec mes $\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$
Triangle ABC équilatéral	$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{\mp i\frac{\pi}{3}}$

Limites et continuité.

1- Limites

f est une fonction numérique de variable réelle x, d'ensemble de définition D et x_0 un réel ou $-\infty$ ou $+\infty$

1-1- Limites d'une fonction en un point

Soit x_0 un nombre réel

- si $x_0 \in D$ et f admet une limite en x_0 alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- si $x_0 \notin D$ et si $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ on a les cas suivants :

Premier cas : $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = a$ et $\lim\limits_{x \to x_0} v(x) = b$ alors

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \frac{a}{b}$ ($a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$)

Deuxième cas : $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = a(a \in \mathbb{R}^*)$ et $\lim\limits_{x \to x_0} v(x) = 0$ alors

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = ?\infty$ le signe de a et de v(x) permettent de savoir si la limite est $-\infty$ ou $+\infty$

Troisième cas : $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to x_0} v(x) = 0$

On a une détermination de la forme $\frac{0}{0}$

Pour lever cette indétermination, on peut :

- factoriser u(x) et v(x) puis simplifier par $'x - x_0)$ si f est une fonction rationnelle
- utiliser l'expression conjuguée si f est une fonction irrationnelle
- utiliser le développement limité de f au voisinage de 0
- Utiliser les limites remarquables dans les autres cas.

Limites remarquables

Pour tout réel a non nul, on a :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(ax)}{ax} = 1 \; ; \; \lim_{x \to 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = 1 \; ; \; \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(ax)}{(ax)} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(ax)}{(ax)^2} = \frac{1}{2} \; ; \; \lim_{x \to 0} \frac{\cos(ax)-1}{(ax)^2} = -\frac{1}{2}$$

Limites d'une fonction infinie

Pour tous réels a et c non nul et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{x \to -\infty} c = \lim_{x \to +\infty} c = c \quad ; \; \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x} = +\infty \; ; \; \lim_{x \to -\infty} \frac{a}{x^n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si n est pair} \\ -\infty & \text{si n est impair} \end{cases} \; ; \; \lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$$

Règle de calcul

- A l'infini la limite d'une fonction polynôme est celle de son monôme de plus haut degré.
- A l'infini la limite d'une fonction rationnelle est celle du quotient du monôme de plus haut degré du numérateur par le monôme de plus haut degré du dénominateur.

Les formes d'indéterminations

$$\frac{0}{0}\ ;\ \frac{\infty}{\infty} ; 0 \times \infty\ ;\ +\infty - \infty\ ;\ 0^0$$

Pour lever ces indéterminations, on peut :

- Utiliser l'expression conjuguée
- Mettre une puissance convenable de x en facteur
- Factoriser ou développer l'expression selon le cas
- Utiliser les règles de calculs
- Utiliser les règles de comparaison
- utiliser le développement limité de f au voisinage de 0
- Utiliser les limites remarquables dans les autres cas.

Limites par composition

fog étant la composée d'une fonction g par une fonction f, a est un element ou une borne d'un intervalle sur lequel fog est définie, si $\lim\limits_{x \to a} g = b$ et $\lim\limits_{x \to b} f = l$ alors $\lim\limits_{x \to a} fog = l$.

a, b et l sont des réels ou $-\infty$ ou $+\infty$

Limites par comparaison

a et l sont des réels ou $-\infty$ ou $+\infty$

- si $u \geq v$ et si $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} v(x) = -\infty$
- si $u \geq v$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$
- si $u \leq f \leq v$ et si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = \lim\limits_{x \to a} v(x) = l$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ (Théorème des gendarmes)

2- Étude d'une branche infinie

2-1- Les asymptotes

- **Asymptotes parallèles aux axes de repère**

Propriétés

Soit x_0 un nombre réel.

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, alors la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote verticale à (C) au voisinage de ∞.

Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = x_0$, alors la droite d'équation $y = x_0$ est asymptote horizontale à (C) au voisinage de ∞.

Asymptotes non parallèles aux axes de repère (asymptote oblique)

Propriété :

Soit$(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Si $\lim_{x \to \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à (C) au voisinage de ∞.

- **Asymptotes obliques ou direction asymptotique**

Lorsque $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ alors il y a possibilité d'existence d'une asymptote oblique ou d'une direction asymptotique pour la courbe(C) de f, au voisinage de ∞.

On calcule à cet effet $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$. On a les résultats ci-après :

- Si $\begin{cases} \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \\ \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{cases}$, alors (C) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses au voisinage de∞.
- Si $\begin{cases} \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \\ \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty \end{cases}$, alors (C) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de ∞.
- Si $\begin{cases} \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \\ \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a, a \in \mathbb{R}^* \end{cases}$, alors on calcule $\lim_{x \to \infty} [f(x) - ax]$

Premier cas : $\lim_{x \to \infty} [f(x) - ax] = \infty$

Alors (C) admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = ax$ au voisinage de ∞.

Deuxième cas : $\lim_{x \to \infty} [f(x) - ax] = b, b \in \mathbb{R}$.
Alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à (C) au voisinage de ∞.

3- Continuité d'une fonction

Soit f une fonction numerique de variable x d'ensemble de definition D et K est un intervalle de $\mathbb{R}$.

- **Continuité d'une fonction en un point**

x_0 est un réel.

- f est continue en x_0, ($x_0 \in Df$), si et seulement si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- si f est définie par intervalles de borne x_0 alors on utilise la propriete suivante :

f est continue en x_0 $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)$

- f n'est pas continue en x_0, ($x_0 \in Df$), si et seulement si

$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) \neq f(x_0)$

4- Prolongement par continuité

- **Théorème et définition**

Soit K un intervalle ouvert contenant un reél x_0. Soit f une fonction definie sur $K - \{x_0\}$.

Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l, l \in \mathbb{R}$, alors la fonction $p : x \mapsto \begin{cases} p(x) = f(x), \text{si } x \neq x_0 \\ p(x_0) = l \quad , \text{si } x = x_0 \end{cases}$ est continue en x_0

La fonction p est appelée ''prolongement par continuité de f en x_0''

5- Continuité d'une fonction sur un intervalle

a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$

- f est continue sur l'intervalle $]a, b[$ si elle est continue en tout point de cet intervalle.
- f est continue sur l'intervalle $[a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$, continue a droie en a et à gauche en b.

Propriétés :

- si f est continue et ne s'annule pas sur K alors f garde un signe constant sur K.
- si f est continue sur un intervalle K contenant les réels a et b et si $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle$[a, b]$.
- si de plus f est une fonction strictement monotone sur K alors l'équation admet une solution unique dans l'intervalle $[a, b]$.
- si f est une fonction continue sur un intervalle K contenant les réels a et b et si α est un réel compris entre les réels f(a) et f(b) alors $f(x) = \alpha$ admet au moins une solution dans l'intervalle$[a, b]$.
- si f est une fonction continue et stritement monotone sur K alors :

  f réalise une bijection de Kvers f(K) ;

  la bijection réciproque f^{-1} de f est continue sur f(K)

  f^{-1} est strictement monotone et a le même sens de variation que f

- **Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone**

	f strictement croissante	f strictement décroissante
$[a, b]$	$[f(a); f(b)]$	$[f(b); f(a)]$
$[a; b[$	$\left[f(a); \lim\limits_{\substack{x\to b \\ <}} f(b)\right[$	$\left[\lim\limits_{\substack{x\to b \\ <}} f(b); f(a)\right[$
$]a; b[$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to a \\ >}} f(x)\,; \lim\limits_{\substack{x\to b \\ <}} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to b \\ <}} f(x)\,; \lim\limits_{\substack{x\to a \\ >}} f(x)\right[$
$[a; +\infty[$	$\left[f(a); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x); f(a);\right[$
$\mathbb{R}$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\,; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\,; \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$

Dérivation – Etudes de fonctions.

1- Dérivation

1-1- Dérivabilité en un point

- **Définition**

Soit f une fontion definie sur un intervalle ouvert contenant le réel x_0

On dit que f est dérivable en x_0, lorsque $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est un réel.

Cette limite est dans ce cas appelée nombre dérivée de f en x_0 et est notée $f'(x_0)$.

On dit que f est dérivable à gauche en x_0, lorsque $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est un réel.

Cette limite est dans ce cas appelée nombre dérivée à gauche de f en x_0 et est notée $f_g{}'(x_0)$.

On dit que f est dérivable à droite en x_0, lorsque $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est un réel.

Cette limite est dans ce cas appelée nombre dérivée à droite de f en x_0 et est notée $f_d{}'(x_0)$.

Propriété :

Toute fonction f derivable en un réel x_0 est dérivable à gauche et à droite en x_0 et :

$f'_g(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$.

- **Interprétation géométrique du nombre dérivé.**

- si une fonction f est dérivable en un réel x_0 alors la courbe de f admet au point $M((x_0; f(x_0))$ une tangente d'équation : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
- si une fonction f est dérivable à gauche en un réel x_0 alors la courbe de f admet au point $M((x_0; f(x_0))$ une demi-tangente d'équation : $\begin{cases} x \leq x_0 \\ y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \end{cases}$
- si une fonction f est dérivable à droite en un réel x_0 alors la courbe de f admet au point $M((x_0; f(x_0))$ une demi-tangente d'équation : $\begin{cases} x \geq x_0 \\ y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \end{cases}$
- si une fonction f est dérivable à gauche et à droite en un réel x_0 et si $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$, alors la courbe de f admet au point $M((x_0; f(x_0))$ deux demi-tangentes de coefficients directeurs différents, donc de directions différentes. Le point $M((x_0; f(x_0))$ est alors appelé point anguleux.
- si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$; f n'est pas dérivable en x_0, alors la courbe admet une demi-tangente verticale au point M $(x_0; f(x_0))$ d'équation (T_d): $\begin{cases} x = x_0 \\ y \geq f(x_0) \end{cases}$
- si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$; f n'est pas dérivable en x_0, alors la courbe admet une demi-tangente verticale au point M $(x_0; f(x_0))$ d'équation (T_g): $\begin{cases} x = x_0 \\ y \geq f(x_0) \end{cases}$
- si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$; f n'est pas dérivable en x_0, alors la courbe admet une demi- tangente verticale au point M $(x_0; f(x_0))$ d'équation (T_d): $\begin{cases} x = x_0 \\ y \leq f(x_0) \end{cases}$

- si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$; f n'est pas dérivable en x_0, alors la courbe admet une demi-tangente verticale au point M $(x_0; f(x_0))$ d'équation (T_g): $\begin{cases} x = x_0 \\ y \leq f(x_0) \end{cases}$

2- Dérivées usuelles

- **Dérivées des fonctions élémentaires**

Fonction	Dérivée	Ensemble de dérivabilité
$x \mapsto c \ (c \in \mathbb{R})$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto ax \ (a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n \ (n > 1)$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{x^n} \ (c \in \mathbb{R})$	$x \mapsto \frac{-n}{x^{n+1}}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$[0; +\infty[$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(ax+b)$ $(a \in \mathbb{R}^*)$	$x \mapsto a\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(ax+b)$ $(a \in \mathbb{R}^*)$	$x \mapsto -a\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$ ou $x \mapsto 1+\tan^2 x$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

- **Dérivées et opérations sur les fonctions**

Fonction f	Fonction dérivée f'
$f+g$	$f'+g'$
Af	$\alpha f'$
$f \times g$	$f'g + g'f$
$\frac{1}{g}$	$\frac{-g'}{g^2}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g - g'f}{g^2}$
Af	$\alpha f'$

$\sqrt{f}\ \ (f > o)$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
$f^r\ (r \in \mathbb{Q}^*, f \neq 0)$	$rf'\, f^{r-1}$
gof	$f' \times (g'of)$
$\cos(f)$	$-f'\sin(f)$
$\sin(f)$	$f'\cos(f)$

3- Dérivation et sens de variation

Une fonction est strictement monotone sur un intervalle est une fonction qui est :

Soit strictement croissante ou soit strictement décroissante sur cet intervalle.

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K.

- si $f'(x) < 0, \forall\, x \in K(\text{resp.}\, f'(x) > 0, \forall\, x \in K)$, alors f est strictement décroissante sur K (resp. strictement croissante surK).
- si $f'(x) \leq 0, \forall\, x \in K(\text{resp.}\, f'(x) \geq 0, \forall\, x \in K)$, alors f est décroissante sur K (resp. croissante sur K).
- si $f'(x) = 0, \forall\, x \in K$, alors f est une constante sur K.

- **Sens de variation d'une fonction numérique**

Etudier le sens de variations d'une fonction revient à :

1) Déterminer l'ensemble de définition E de f ;
2) étudier la dérivabilité de f et exprimer $f'(x)$;
3) étudier le signe de $f'(x)$;
4) donner les intervalles de l'ensemble de définition E sur lesquels f est croissante et / ou les intervalles de E sur lesquels f est décroissante.

4- Dérivée de la réciproque d'une fonction

Propriété :

Soit f une fonction derivable et strictement monotone sur un intervalle K, telle que :$\forall\, x \in K, f'(x) \neq 0$

- La fonction f réalise une bijection de K vers f(K)
- La bijection réciproque f^{-1} est dérivable sur f(K) et on a : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$

L'ensemble de dérivabilité de f^{-1}est $f(K) - \{f(x)/f'(x) = 0,\ x \in K\}$

5- Inégalités des accroissements finis

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K, a et b deux éléments de K $(a < b)$.

S’il existe deux nombres réels m et M tels que pour tout x élément de $[a; b]$,

$m \leq f'(x) \leq M$, alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K.

S’il existe un nombre réel M tel que pour tout x élément de $[a; b]$, $|f'(x)| \leq M$, alors pour tous a &et b deux éléments de K, on a : $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

6- Dérivées successives d’une fonction

Soit f une fonction et K un intervalle.

- si f est dérivable sur K, sa dérivée f'est appelé dérivée première de f ; on la note aussi $f^{(1)}$.
- si f' est dérivable sur K, sa dérivée f''est appelé derivée seconde de f ; on la note aussi $f^{(2)}$.
- de proche en proche, la fonction dérivée n -ième de f sur K, si elle existe, est la dérivée de la fonction derivée $(n-1)$-ième de f sur K ; on la note $f^{(n)}$.

- **Développement limité d’ordre n d’une fonction au voisinage de 0 ($n \in \mathbb{N}^*$)**

Si la fonction f est n fois dérivable sur un intervalle contenant 0 alors on a :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

Quelques développements limités au voisinage de 0 et à l’ordre 3.

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$

7- Exemples d’étude de fonction

- **Quelques éléments de symétrie**

Axe de symétrie

Etant donné un réel a, la droite d’équation $x = a$ est axe de symetrie de la courbe representative d’une fonction f d’ensemble de definition D si, et seulement si :

$$\forall\, x \in D, \begin{cases} (2a - x) \in D \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$$

L’ensemble d’étude peut être ramené à :

$Df \cap [\, a;\ +\infty[$ ou $Df \cap\,]-\infty\,; a]$

Centre de symétrie

Un point $A(a, b)$ est centre de symétrie de la courbe représentative d’une fonction f d’ensemble de definition D si, et seulement si :

$\forall\, x \in D, \begin{cases} (2a - x) \in D \\ f(2a - x) + f(x) = 2b \end{cases}$

L'ensemble d'étude peut être ramené à :

$Df \cap [\, a;\ +\infty[$ ou $Df \cap\,]-\infty\,; a]$

- **Parité et périodicité**

Parité

Soit f une fonction numerique dont l'ensemble de définition est D :

- f est dite paire lorsque : $\forall\, x \in D, \begin{cases} (-x) \in D \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

Lorsqu'une fonction f est paire, alors l'axe des ordonnées est axe de symetrie de la courbe représentative de f.

L'ensemble d'étude peut être ramené à :

$Df \cap [\, 0;\ +\infty[$ ou $Df \cap\,]-\infty\,; 0]$

- f est dite impaire lorsque : $\forall\, x \in D, \begin{cases} (-x) \in D \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

Lorsqu'une fonction f est impaire, alors l'origine du repère du plan est centre de symétrie de la courbe représentative de f.

L'ensemble d'étude peut être ramené à :

$D \cap [\, 0;\ +\infty[$ ou $D \cap\,]-\infty\,; 0]$

Périodicité

On dit qu'une fonction f d'ensemble de definition D est periodique, lorsqu'il existe un réel strictement positif p tel que : $\forall\, x \in D, \begin{cases} (x + p) \in D \\ f(x + p) = f(x) \end{cases}$

Le réel p est appéle une periode de la fonction f.

L'intervalle d'étude peut être ramené à l'intervalle d'amplitude p,

$D \cap [-\frac{p}{2}; \frac{p}{2}]$ ou $D \cap [0\,; p]$

Si f est une fonction périodique dont une période est p et si de plus la droite d'équation $x = a$ (resp, le point $A(a, b)$ est axe (resp, centre) de symetrie de la courbe représentative de f, alors il est jusdicieux d'etudier f sur $D \cap \left[\, a\,; a + \frac{p}{2}\right]$, du fait de la periodicité et de la parité.

En particulier si f est periodique dont une periode est p et en plus paire ou impaire, son étude se fera sur $D \cap \left[\, 0\,; \frac{p}{2}\right]$

Plan d'étude d'une fonction

Pour étudier une fonction f, on suit les étapes suivantes :

1- Domaine de définition de f (D_f)

2- Décriée de f et son signe
3- Sens de variation de f
4- Limites aux bornes de (D_f)
5- Tableau de variations de f
6- Branches infinies
7- Points remarquables
8- Constriction de la courbe de f

Primitives.

1- Primitives

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle K

On appelle Primitive de f sur K toute fonction F dérivable sur K telle que :

$\forall\, x \in K \;\; F'(x) = f(x).$

Propriétés :

- Toute fonction continue sur un intervalle K admet sur K une infinité de primitives.
- Soit f une finction admettant une primitive F sur un intervalle K
    - Pour tout nombre réel c, la fonction $x \mapsto F(x) + c$ est une primitive de f sur K.
    - Toute primitive de f sur K est de la forme $x \mapsto F(x) + c$, où $c \in \mathbb{R}$.
- Soit f une finction admettant une primitive F sur un intervalle K, y_0 un nombre réel et x_0 un élément de K.
    - Il existe une primitive et une seule de F de f sur K qui prend la valeur y_0 en $x_0 (F(x_0) = y_0)$

1-1- Primitives des fonctions usuelles

La connaissance des dérivés des fonctions élémentaires permet de dresser le tableau suivant, où c désigne un nombre réel.

Fonction f	Primitives de f	Intervalle
$x \mapsto a \;\; (a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto ax + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n \; (n > 1)$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$]0\,;+\infty[$ ou$]-\infty; 0[$
$x \mapsto \frac{1}{x^2} \; (c \in \mathbb{R})$	$x \mapsto \frac{-1}{x} + c$	$]0\,;+\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c$	$]0\,;+\infty[$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + c$	$\mathbb{R}$

Rédigé par Ir. KPADJOUDA Rodrigue contact : 96813262

$x \mapsto \sin(ax+b)$ $(a \in \mathbb{R}^*)$	$x \mapsto -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(ax+b)$ $(a \in \mathbb{R}^*)$	$x \mapsto \frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$	$x \mapsto \tan x + c$	$\left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi\,;\,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right[\ (k \in \mathbb{Z})$

1-2- Autres primitives

Si f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle K alors on a :

Fonctions	Primitives
$f'f^n (n \in \mathbb{N} \text{ et } f \neq 0)$	$\frac{1}{n+1}f^{n+1}$
$f'f^r\ (r \in \mathbb{Q}-\{-1\} \text{ et } f \neq 0)$	$\frac{1}{r+1}f^{r+1}$
$\frac{f'}{f^r}(r \in \mathbb{Q}-\{1\} \text{ et } f \neq 0)$	$\frac{-1}{(r-1)f^{r-1}}$
$\frac{f'}{\sqrt{f}}$	$2\sqrt{f}$
$f'\cos(f)$	$\sin(f)$
$f'\sin(f)$	$-\cos(f)$

Fonction logarithme népérien.

1- Fonction logarithmique népérien

Définition :

On appelle fonction logarithme népérien l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1. Elle est notée In

$\forall\, x \in]0;+\infty[, f(x) = \ln x$

Propriété :

La fonction $\ln : x \longmapsto \ln x$ est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ alors elle realise une bijection de $]0;+\infty[$ sur R

Propriété :

$\forall\,(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

$\ln a = \ln b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ a = b \end{cases}$; $\ln a \leq \ln b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ a \leq b \end{cases}$

$\ln(a.b) = \ln a + \ln b$; $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$; $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$ avec $\ln 1 = 0$

$\ln a^r = r \ln a$, $r \in \mathbb{Q}^*$; $\ln \sqrt{a} = \ln(a)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln a$

2- Les limites remarquables

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty \quad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x\ln x = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \quad ;$$

- **Développement limité au voisina de 0, à l'ordre 3 de $\ln(1+x)$**

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

3- Fonctions comportant ln

3-1- Ensemble de définition

Si u est une fonction d'ensemble de définition D_u alors l'ensemble de définition de la fonction :

- $x \mapsto \ln[u(x)]$ est $D = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u$ et $u(x) > 0\}$
- $x \mapsto \ln|u(x)|$ est $D = \{x \in \mathbb{R} / \in D_u$ et $u(x) \neq 0\}$

3-2- Dérivée de $\ln(u(x))$

Propriété :

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle K.

La fonction $\ln(u)$ est dérivable sur K et on a : $[\ln(u)]' = \frac{u'}{u}$

Exemples :

La fonction $x \mapsto \ln(x^3 - x)$ est dérivable sur chacun des intervalles $]-1; 0[$ et $]1; +\infty[$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{3x^2-1}{x^3-x}$

La fonction $x \mapsto \ln(\frac{1}{x-1})$ est dérivable sur $]1; +\infty[$ dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{-1}{x-1}$

3-3- Primitives de $\frac{u'}{u}$

Propriété :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle K.

La fonction $\frac{u'}{u}$ admet pour primitive sur K la fonction $\ln|u|$.

Exemples :

Une primitive sur $\mathbb{R}-\{0\}$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est la fonction $x \mapsto \ln|x|$.

Une primitive sur $\left]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction $x \mapsto \tan(x)$ est la fonction $x \mapsto -\ln(\cos(x))$.

4- Fonction logarithme de base a, a $\in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

Définition :

On appelle logarithme de base a, la fontion notée $\log_a$ et définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\mathbb{R}_+^*$ $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$

Le logarithme de base 10 est tout simplement notée log.

Ainsi : $\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$, $\forall$ x $\in]0;+\infty[$.

Remarque

$\forall$ x $\in]0;+\infty[$, On a $\log_e(x) = \frac{\ln x}{\ln e} = \frac{\ln x}{1}$; on a donc $\log_e = \ln$

Fonction exponentielle népérienne.

1- Fonction exponentielle népérienne

Définition :

On appelle fonction exponentielle népérienne la bijection réciproque de la fonction $\ln: x \longmapsto \ln x$. Elle est notée exp.

$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = e^x$

Propriété :

La fonction exponentielle népérienne $\exp : x \longmapsto e^x$ est definie, continue et derivable sur R.

$\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = e^x$

La fonction exponentielle népérienne Exp : $x \longmapsto e^x$ est continue et strictement croissante sur R alors elle réalise une bijection de R sur $]0;+\infty[$

Propriété :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$; $e^{x+y} = e^x.e^y$; $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$; $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$; $(e^x)^y = e^{x.y}$

$e^{\ln a} = a$ et $\ln e^a = a$ avec $\ln e = 1$

$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$

2- Les limites remarquables

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0 \quad \lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{ax} = \begin{cases} 0 & \text{si } a < 0 \\ +\infty & \text{si } a > 0 \end{cases} \qquad \lim_{x\to-\infty} e^{ax} = \begin{cases} 0 & \text{si } a > 0 \\ +\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

- **Développement limité au voisinage de 0, à l'ordre 3 de e^x**

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to0} \varepsilon(x) = 0$

3- Fonctions comportant exp

3-1- Ensemble de définition

u étant une fonction numérique d'ensemble de définition D_u, alors l'ensemble de définition de la fonction $\mathbf{exp(u(x))}$ celui de u ;

$\mathbf{D_{exp(u(x))}} = D_u$

3-2- Dérivée de $\mathbf{exp(u(x))}$

Propriété :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle K.

La fonction $\mathbf{exp(u(x))}$ est dérivable sur K et on a : $\left[\mathbf{exp(u(x))}\right]' = \mathbf{u'(x)exp(u(x))}$

NB : La fonction $\exp(u(x))$ se note également e^u ; sa dérivée est alors $u'e^u$.

Exemples :

La fonction $x \mapsto e^{x^3-x}$ est dérivable sur R et sa dérivée est la fonction $x \mapsto (3x^2-1)e^{x^3-x}$

La fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{x-1}}$ est dérivable sur $R - \{1\}$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{-1}{(x-1)^2}e^{\frac{1}{x-1}}$

3-3- Primitives de $\mathbf{u'e^u}$

Propriété :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle K.

La fonction $u'e^u$ admet pour primitive sur K la fonction e^u.

Exemples :

Une primitive sur $\mathbb{R} - \{0\}$ de la fonction $x \mapsto \frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ est la fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$.

Une primitive sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$ est la fonction $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$.

1- Fonctions exponentielles de base a, $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

Définition :

La bijection réciproque du logarithme de base a est appelée exponentielle de base a et est notée $\exp_a$

$\forall x \in \mathbb{R}, \exp_a(x) = a^x = e^{x \ln a}$

Propriété :

La fonction exponentielle de base a $\exp_a : x \longmapsto a^x$ est definie, continue et derivable sur R.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp_a'(x) = (\ln a)\, a^x$$

La fonction exponentielle de base a $\exp_a : x \longmapsto a^x$ est :

Strictement croissante sur R si $a > 1$;

Strictement décroissante sur R si $0 < a < 1$;

Propriété :

$\forall \ (a,b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ On a :

$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$; $a^{x+y} = a^x . a^y$; $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$; $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$; $(a^x)^y = a^{x.y}$

$\forall x \in \mathbb{R}, a^x > 0$

2- Limites et fonctions exponentielles de base a

Cas ou $a > 1$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x a^x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

Cas ou $0 < a < 1$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} x a^x = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

3- Fonctions puissances d'exposant α, $\alpha \in \mathbb{R}^*$

Définition :

On appelle fonction puissance d'exposant α, la fonction définie par : $f_\alpha(x) = x^\alpha$

$\forall x \in]0; +\infty[, f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$

Propriété :

La fonction puissance d'exposant α $f_a : x \mapsto x^{\alpha}$ est définie, continue et dérivable sur $]0; +\infty[$.

$\forall\, x \in]0; +\infty[, f_a'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

La fonction puissance d'exposant α $f_a : x \mapsto x^{\alpha}$ est :

- Strictement croissante sur $]0; +\infty[$ si $a > 0$;
- Strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ si $a < 0$;

Propriété :

$\forall\ (a, b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$ On a :

$a^a = b^a \Leftrightarrow a = b$; $a^a \times b^a = (a \times b)^a$

4- **Limites et fonctions puissances d'exposant a**

Cas où $a > 0$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^a = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} x^a = +\infty$$

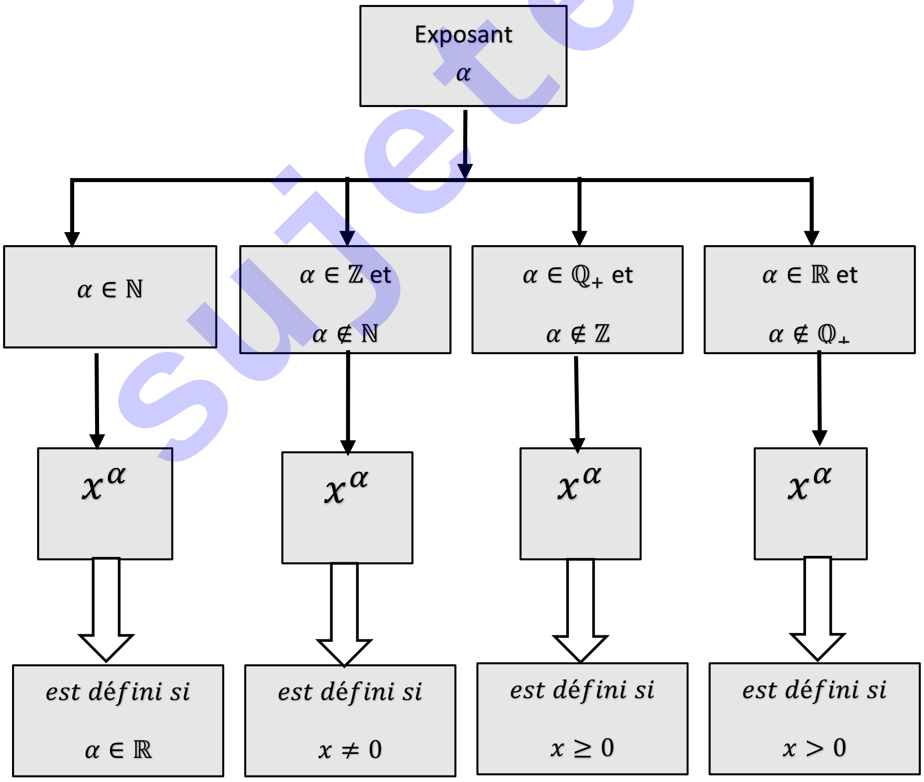
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^a - 1}{x - 1} = a$$

Cas où $a < 0$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^a = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^a = 0$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^a - 1}{x - 1} = a$$

Diagramme 10 : Fonctions puissances et domaine de définition



5- Fonctions comportant $\mathbf{u}^{\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)

5-1- Dérivée de $\mathbf{u}(\mathbf{x})^{\alpha}$

Propriété :

Soit $\boldsymbol{\alpha}$ un nombre réel et u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle K.

La fonction $\mathbf{u}(\mathbf{x})^{\alpha}$ est dérivable sur K et on a : $[\mathbf{u}(\mathbf{x})^{\alpha}]' = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{u}'(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})^{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{1}}$

Exemple :

La fonction $x \mapsto (\sin x)^{\pi}$ est dérivable sur R et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \pi \cos x\,(\sin x)^{\pi-1}$

La fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{x-1}}$ est dérivable sur $R - \{1\}$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{-1}{(x-1)^2}e^{\frac{1}{x-1}}$

5-2- Primitives de $\mathbf{u}'\mathbf{u}^{\alpha}$

Propriété :

Soit $\boldsymbol{\alpha}$ un nombre réel différent de -1. u une fonction dérivable sur un intervalle K.

La fonction $u'u^{\alpha}$ admet pour primitive sur K la fonction $\frac{\mathbf{u}^{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{1}}$.

Exemples :

La fonction $x \mapsto 2x(1-x^2)^{\sqrt{2}}$ admet pour primitive sur]-1 ; 1[la fonction $x \mapsto -\frac{(1-x^2)^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1}$.

6- Croissance comparée de $\ln x$, x^{α}, e^{x}

Limites de référence

$\forall\ a \in]0;+\infty[$ On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a}=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^a}{\ln x}=+\infty \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x^a\ln x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^a}=+\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^a}{e^x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\ln x}=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}|x|^a e^x = 0 \qquad \lim_{x\to\mp\infty}|x|^a e^{-x} = 0$$

Calcul intégral.

1- Calcul intégral

Définition :

soit f une fonction sur un intervalle K, a et b deux éléments de K.

On appelle intégrale de a à b de f le nombre réel $F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f sur K.

On note : $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b$

1-1- Propriété algébrique

Relations de Chasles

soit f une fonction continue sur un intervalle K, a, b et c trois éléments de K.

On a : $\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$

Linéarité de l'intégrale

soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle K, α un nombre réel, a et b deux éléments de K.

On a : $\int_a^b \alpha f(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt \quad \int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$

1-2- Propriété de comparaison

Signe de l'intégrale

Propriété

soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle K, a et b deux éléments de K$(a \leq b)$.

Si $\forall\, x \in [a\,;b], f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.

Si $\forall\, x \in [a\,;b], f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt$$

1-3- Inégalité de la moyenne

S'il existe deux réels m et M tels que $m \leq f(x) \leq M, \forall\, x \in [a\,;b]$, alors :

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq M$$

Le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$ est appelé valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$.

1-4- Intégrations par parties

soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle K telles que les derivées f' et g' sont continues sur intervalle K, a et b deux éléments de K.

On a : $\int_a^b f'(t).g(t)dt = [f(t).g(t)]_a^b - \int_a^b f(t).g'(t)dt$

1-5- Changement de variable affine

On pose $u = \alpha x + \beta, (\alpha \neq 0)$

Si f admet des primitives sur $[\alpha a + \beta\,; \alpha b + \beta]$ lorsque $\alpha > 0$ ou sur $[\alpha b + \beta\,; \alpha a + \beta]$ lorsque $\alpha < 0$, alors : $\int_a^b f(\alpha x + \beta)dx = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(u)du$

1-6- Intégration de fonctions paires, impaires, périodiques.

Propriété :

Soit f une fonction continue sur un intervalle K symétrique par rapport à 0.

Pour tout a élément de K, on a :

$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$ si f est impaire

$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$ si f est paire

Soit f une fonction continue sur R et périodique, de période p.

Pour tous nombres réels a et b on a :

$$\int_{a+p}^{b+p} f(t)dt = \int_{a}^{a} f(t)dt \quad ; \quad \int_{a}^{a+p} f(t)dt = \int_{0}^{p} f(t)dt$$

2- Fonction définie par une intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle K et a élément de K.

La fonction $x \longmapsto \int_{a}^{x} f(t)dt$, de K vers R, est la primitive de f sur K qui s'annule en a.

3- Calcul d'aire et de volumes

3-1- Calculs d'aires

Propriété :

soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle K, (C_f) et (C_g) leurs représentations graphiques respectives, a et b deux éléments de $K(a \leq b)$.

Lorsque $f \leq g$ sur $[a; b]$, l'aire du domaine D délimité par $(C_f), (C_g)$ et les droites d'équations

$x = a$ et $x = b$ est : $A(D) = \int_{a}^{b}[g(t) - f(t)]dt$.

3-2- Calcul de Volumes : solide S de révolution autour d'un axe

Le volume du solide S est alors : $V = \pi \int_{a}^{b}[f(t)]^2 dt$.

3-3- Valeur approchée d'une intégrale

f est une fonction continue sur K. On suppose que $a < b$ et $J = \int_{a}^{b} f(x)dx$. Lorsqu'on ne peut pas déterminer une primitive de f sur K, on paut calculer une valeur approchée de l'intégrale J par plusieurs méthodes parmi lesquelles on peut citer : la méthode des rectangles et la méthodes des trapèzes ..

Pour cela, on subdivise [a ; b] en n intervalles de même amplitude $h = \frac{b-a}{n}$ et de bornes

$$x_0 = a\ ;\ x_1 = a + h\ ;\ x_2 = a + 2h\ ;\ x_3 = a + 3h\ ; \dots ;\ x_{n-1} = a + (n-1)h\ ;\ x_n = b$$

- **Méthode des rectangles**

On calcule :

$S_1 = h[f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})]$ et $S_2 = h[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_2)]$

On a : $J \simeq \frac{S_1+S_2}{2}$

- **Méthode des trapèzes**

$$A = h\left[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \cdots + \frac{1}{2}f(x_n)\right]$$

On a : $J \simeq A$

Equations différentielles linéaires à coefficients constants.

Définitions

L'équation différentielle est une relation entre une fonction inconnue et ses dérivées successives.

La fonction inconnue est souvent notée y et ses dérivées successives $y', y'', \ldots$

Une équation différentielle est dite d'ordre n lorsque le plus grand ordre des dérivées intervenant dans cette équation est n.

Toute fonction vérifiant une équation différentielle sur un intervalle ouvert K est appelée solution sur K de cette équation différentielle.

Résoudre une équation différentielle sur un intervalle ouvert K c'est déterminer l'ensemble des solutions sur K de cette équation différentielle.

1- Équations différentielles des types $y' = f(x)$ et $y'' = g(x)$

1-1- Équations du type $y' = f(x)$

Résoudre sur $]o; +\infty[$ l'equation differentielle (E1) : $xy' + 1 = 0$

Une primitive sur $]o; +\infty[$ de la fonction $x \longmapsto \frac{-1}{x}$ est la fonction : $x \longmapsto -\ln x$

Donc, les solutions sur $]o; +\infty[$ de (E1) sont les fonctions : $x \longmapsto -\ln x + c$ $(c \in \mathbb{R})$

1-2- Équations du type $y'' = g(x)$

Résoudre sur R l'équation différentielle (E2) : $y'' = e^{3x}$

Déterminer la solution de (E2) vérifiant : $y'(0) = 1$ et $y(0) = 0$

On a : (E2) $\Leftrightarrow y' = \frac{1}{3}e^{3x} + c_1$ $(c_1 \in \mathbb{R})$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{9}e^{3x} + c_1x + c_2$ $(c_2 \in \mathbb{R})$

Donc, les solutions sur R de (E2) sont les fonctions : $x \longmapsto \frac{1}{9}e^{3x} + c_1x + c_2$

$(c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R})$.

On a : $y'(0) = 1$ et $y(0) = 0$

$y(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{9} + c_2 = 0$; $c_2 = -\frac{1}{9}$

$y'(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} + c_1 = 1\ ;\ c_1 = \frac{2}{3}$

Donc, la solution sur R de (E_2) vérifiant $y'(0) = 1$ et $y(0) = 0$ est la fonction : $x \longmapsto \frac{1}{9}e^{3x} + \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}$

2- Equations différentielles du type $ay' + by = 0, (a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

Propriété

Les solutions sur R de l'équation différentielle $ay' + by = 0$ sont les fonctions $x \longmapsto Ae^{\frac{-b}{a}x} (A \in \mathbb{R})$

Pour tout couple $(x_0; y_0)$de nombres réels, l'équation différentielle $ay' + by = 0$ admet une unique solution sur R qui vérifie : $g(x_0) = y_0$

3- Equation différentielle du type $ay'' + by' + cy = 0, (a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Propriété :

Pour résoudre sur R une équation différentielle du type $ay'' + by' + cy = 0$ on peut résoudre l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ et on utilise le tableau suivant :

$\Delta = b^2 - 4ac$	Solutions de l'équation caractéristique	Solutions de l'équation différentielle
$\Delta = 0$	une solution double : r	$x \longmapsto (Ax + B)e^{rx}$ $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$
$\Delta > 0$	deux solutions réelles distinctes : r_1 et r_2	$x \longmapsto Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$ $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$
$\Delta < 0$	deux solutions complexes conjuguées : $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$	$x \longmapsto (A\cos\beta x + B\sin\beta x)e^{\alpha x}$ $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$

Pour trois nombres réels donnés $x_0; y_0$et y_1, l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ admet une unique solution g qui vérifie : $\begin{cases} g(x_0) = y_0 \\ g(x_0) = y_1 \end{cases}$

<u>Suites numériques.</u>

1- Suites numériques

Définition

On appelle suite numérique toute fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$

En général, une suite numérique (u_n) est déterminée par l'un des procédés suivants :

- une formule explicite permettant de calculer u_n en fonction n ;

C'est le cas des suites de terme général $n + (-2)^n$ ou $u_n(n + 1)e^{-n}$, comme des suites du types $u_n = f(n)$ où f est une fonction de reccurence ;

- Le premier terme et une formule de récurrence ;

C'est le cas de la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + {u_n}^2$.

Lorsque E désigne l'ensemble de définition d'une suite(u_n), on peut noter $(u_n)_{n \in E}$

1-1- Suite bornées

Soit$(u_n)_{n \in E}$ une suite numerique

- la suite (u_n) est dite minorée, lorsque$\exists\ m \in \mathbb{R} \ / \ \forall\ n \in E, u_n \geq m$.
- la suite (u_n) est dite majorée, lorsque$\exists\ M \in \mathbb{R} \ / \ \forall\ n \in E, u_n \leq M$.
- la suite (u_n) est bornée, lorsqu'elle est à la fois minorée et majorée.

Méthode

Pour démontrer qu'une suite (u_n) est bornée, on peut utiliser l'un des procédés suivants.

- Encadrer le terme général de la suite par deux nombres réels.
- étudier la fonction f, lorsque la suite est de type : $u_n = f(n)$
- Faire un raisonnement par récurrence.

1-2- Suite monotones

Soit$(u_n)_{n \in E}$ une suite numérique

- la suite (u_n) est dite croissante, lorsque $\forall\ n \in E, u_n \leq u_{n+1}$.
- la suite (u_n) est dite décroissante, lorsque $\forall\ n \in E, u_n \geq u_{n+1}$.
- la suite (u_n) est dite constante, lorsque $\forall\ n \in E, u_n = u_{n+1}$.

Méthode

Pour démontrer qu'une suite (u_n) est monotone, on peut utiliser l'un des procédés suivants.

- étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
- comparer à 1 le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, lorsque la suite (u_n) est strictement positive
- étudier le sens de variation de la fonction f, lorsque la suite est de type : $u_n = f(n)$
- Faire un raisonnement par récurrence.

1-3- Principe du raisonnement par récurrence

Pour démontrer, par récurrence qu'une proposition P_n est vraie pour tout $n \in E$:

On vérifie que P_{n_0} est vraie (n_0 est le plus petit élément de E)

On suppose $\forall\ k \geq n_0, P_k$ est vraie et on montre que $\forall\ k \geq n_0$, P_{k+1} est vraie.

On conclut que : pour tout $n \in E$; P_n est vraie.

2- Suites arithmétiques, suites géométriques

Tableau récapitulatif

	Suite arithmétique	Suite géométrique
Premier terme	u_0	u_0
Raison	$r\ (r \in \mathbb{R})$	$q\ (q \in \mathbb{R})$
Formule de récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q\, u_n$
Formule explicite	$u_n = u_0 + nr$ $u_n = u_p + (n-p)r$	$u_n = u_0 q^n$ $u_n = u_p q^{n-p}$
Somme des premiers termes $(u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1})$	$\frac{n}{2}(u_0 + u_{n-1})$	$u_0 \times \frac{1-q^n}{1-q}\ (q \neq 1)$

3- Limite d'une suite numérique

Notion de limite d'une suite

Définition

- Une suite est convergente si elle a une limite finie.
- Une suite divergente si elle n'est pas convergente.

Calcul de limites

Limite d'une suite du type $u_n = f(n)$

Propriété

Soit (u_n) une suite définie par$u_n = f(n)$, ou f est une fonction numérique.

Si f a une limite en$+\infty$, alors (u_n) a une limite et on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Propriétés de comparaison

Propriété :

Soit (u_n) une suite.

- s'il existe deux suites (v_n) et (w_n) telles que $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang
et si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.
- s'il existe une suite (v_n) telle que $|u_n - l| \leq v_n$ à partir d'un certain rang
et si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.

Propriété :

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.
- si une suite est définie par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_n \in \mathbb{R} \end{cases}$

où f est une fonction continue et si (u_n) converge vers un réel l, alors sa limite vérifie $f(l) = l$

Méthode

Pour étudier la limite d'une suite (u_n) dont le terme général vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$, on peut utiliser le procédé suivant :

- Utiliser le graphique pour conjecturer le résultat ;
- résoudre l'équation $f(x) = x$;
- Démontrer le résultat conjecturé.

Statistique.

1- Série statistique à une variable

1-1. Vocabulaire

Etudier une série statistique à une variable consiste à étudier un aspect particulier des éléments d'un ensemble donné. Cet ensemble est appelé population.

- Une partie de cette population s'appelle échantillon.
- Un élément de la population s'appelle individu ou unité statistique.
- L'aspect étudié s'appelle la variable ou le caractère. On distingue :
  - Les caractères quantitatifs qui prennent des valeurs numériques.

  Exemple : taille, poids, âge, nombre d'enfants …

  - Les caractères qualitatifs qui prennent des valeurs non numériques

  Exemple : sexe, profession, nationalité …

- Les valeurs prises par un caractère d'une population sont appelées modalités.
- Si le caractère peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle fixé. Il est dit continu (ou à modalités regroupées en classes). S'il ne peut prendre qu'un certain nombre de valeurs isolées, il est discret.
- Le nombre d'individus pour lesquels la variable prend une valeur donnée s'appelle l'effectif de cette valeur.
- Lorsqu'on associe les modalités ou classes à leurs effectifs, on obtient une série statistique.
- Dans un ensemble à p éléments, on convient de noter x_i la modalité et $n_i$son effectif avec $1 \leq i \leq p$.
  L'ensemble des couples (x_i , n_i) est une série statistique.
- Si N désigne l'effectif total d'une série (x_i , n_i) alors la fréquence de la modalité x_i est donnée par : $f_i = \frac{n_i \times 100}{N}$ (en %) ou $f_i = \frac{n_i}{N}$.

1-2. Quelques caractéristiques

- **Moyenne**

La moyenne d'une série statistique groupée est la moyenne de la série statistique des centres.

Ainsi si $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_p$ désignent les centres des classes respectifs$n_1, n_2, \ldots\ldots, n_p$, alors la moyenne $\bar{x}$ de X est donnée par :

$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1n_1 + x_2n_2 + \cdots + x_pn_p)$, où n désigne l'effectif total.

On note $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_ix_i$ ou $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

- **Variance**

Désignons par x_i les centres des classes d'effectifs n_i et par $\bar{x}$ la moyenne de X

On appelle variance de X, le nombre réel positif V(X) définit par :

$V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ ou $V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i(x_i - \bar{x})^2$

On démontre que :

$V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \bar{x}^2$

- **Ecart type de X**

L'écart type σ(X) de X est :

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

2- Série statistique à double variable

2-1- Présentation des données d'une série statistique double

* Lorsqu'on observe dans une population deux caractères X et Y simultanément, on dit que l'on étudie la série statistique double (X, Y)

* Si x_i et y_i sont des données observées chez un individu i ; (x_i, y_i) est appelé couple de modalité de (X,Y)

* Le nombre d'individus ayant simultanément la valeur x_i pour X et la valeur y_i pour Y est l'effectif du couple de modalités (x_i, y_i)

* Lorsque X et Y sont des caractères (ou variables) quantitatifs, la série statistique (X ,Y) peut être présentée soit à l'aide d'un tableau linéaire soit par un tableau à double entrée.

- Le tableau linéaire est de la forme :

x_i	x_1	x_2	…..	x_n
y_i	y_1	y_2	…..	y_n

- Le tableau à double entrée se présente comme suit :

x_i / y_i	x_1	x_2	…..	x_p
y_1	n_{11}	n_{21}		n_{p1}
y_2	n_{12}	n_{22}	…..	n_{p2}
. . .				

y_q	n_{1q}	n_{2q}	…..	n_{pq}

2-2- Nuage de points et point moyen d'un nuage de points

* Dans un repère orthogonal l'ensemble des points $M_i(x_i, y_i)$ d'effectif n non nul est appelé nuage de points de la série statistique double (X,Y)

* Le point moyen de (X,Y) est le point $G(\bar{x}, \bar{y})$, où $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont les moyennes respectives des séries série statistique marginales X et Y

2-3- Ajustement d'un nuage de points

* Ajuster un nuage de points, c'est le substituer par une courbe qui passe le plus près possible par des points de nuage dont il faut déterminer une équation. Lorsque la courbe d'ajustement est une droite, on dit que l'ajustement est linéaire ou affine.

***Une première méthode** d'ajustement aux données consiste à tracer la courbe que l'observateur estime être le plus proche des points du nuage.

***Deuxième méthode** est celle des moyennes discontinues de Mayer.

Ajustement linéaire par la méthode de Mayer :

La méthode d'ajustement des moyennes discontinues de Mayer consiste à :

-partager le nuage de points en deux parties d'effectifs égaux dans l'ordre où les points se présentent dans le nuage (Et si le nombre de points du nuage est impair alors on met indifféremment le point central dans l'une ou l'autre des parties)

-déterminer les points moyens G_1 et G_2 respectifs des nuages partiels ainsi obtenus.

-déterminer l'équation de la droite (G_1G_2) appelée droite de Mayer.

***Une troisième méthode** est celle des moindres carrées ordinaires.

Ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés ordinaires :

Soit (X ;Y) une série statistique double tel que $V(X) \neq 0$ et $V(Y) \neq 0$

Selon cette méthode, on a :

- La droite de régression de Y en X a pour équation : $y = ax + b$

Où $a = \frac{cov(X,Y)}{V(X)}$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$

Notons que $cov(X, Y) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \bar{x}\bar{y}$

- La droite de régression de X en Y a pour équation $x = a'y + b'$

Où $a' = \frac{cov(X,Y)}{V(Y)}$ et $b' = \bar{x} - a'\bar{y}$

NB : Ces deux droites passent par le point moyen G.

3- Coefficient de corrélation linéaire

Définition

On appelle Coefficient de corrélation linéaire d'une série statistique double (X ,Y) ; le nombre réel r défini par :

$$r = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X).\sigma(Y)} \text{ avec } V(X) \neq 0 \text{ et } V(Y) \neq 0$$

Remarque

* $-1 \leq r \leq 1$

* $r^2 = a.a'$

* r, a, a' et Cov (x,y) ont même signe.

Interprétation

* Si $|r| = 1$, alors la corrélation entre X et Y est parfaite. Les résultats sont fiables. Les points du nuage sont alignés.

* Si $0,87 \leq |r| < 1$, on dit qu'il y a une forte corrélation linéaire entre X et Y. Les résultats sont fiables. Un ajustement linéaire se justifie.

* Si $|r| < 0,87$ on dit que la liaison entre X et Y est lâche. Les résultats ne sont pas fiables. Un ajustement linéaire ne se justifie pas.

* Si r est très proche de 0, on dit qu'il y a indépendance linéaire entre X et Y.

TABLEAU RECAPITULATIF DES ELEMENTS DE CALCUL D'UNE SERIE STATISTIQUE DOUBLE

Grandeurs ou Désignation	Notations	Expressions/Formules
Moyenne de X	$\bar{x}$	$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
Moyenne de Y	$\bar{y}$	$\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$
Coordonnées du point moyen G	$G(\bar{x}, \bar{y})$	$x_G = \bar{x}$ et $y_G = \bar{y}$
Variance de X	$\sigma^2(X)$ ou $V(X)$	$V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$
		$V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \bar{x}^2$
Variance de Y		$V(Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$

	$\sigma^2(Y)$ ou $V(Y)$	$V(Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2 - \bar{y}^2$
Ecart type de X	$\sigma(X)$	$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$
Ecart type de Y	$\sigma(Y)$	$\sigma(Y) = \sqrt{V(y)}$
Covariance du couple (X,Y)	$\sigma(X,Y)$ ou $Cov(X,Y)$	$Cov(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
Coefficient de corrélation linéaire du couple (X,Y)	R	$r = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$ $r = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X).\sigma(Y)}$

Equation de la droite de régression de Y en X	$(\mathcal{D}): y = ax + b$	$a = \frac{cov(X,Y)}{V(X)}$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$ $(\mathcal{D}): y - \bar{y} = \frac{cov(X,Y)}{V(X)}(x - \bar{x})$
Equation de la droite de régression de Y en X	$(\mathcal{D}'): x = a'y + b'$	$a' = \frac{cov(X,Y)}{V(Y)}$ et $b' = \bar{x} - a'\bar{y}$ $(\mathcal{D}'): x - \bar{x} = \frac{cov(X,Y)}{V(Y)}(y - \bar{y})$
Autres relations	Les réels Cov (X, Y); r; a; a' ont le même signe $a = r \times \frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}$ et $a' = r \times \frac{\sigma(X)}{\sigma(Y)}$ $cov(X,Y) = r.\sigma(X).\sigma(Y)$	
On a toujours $\lvert r \rvert \leq 1$ Autre formule de la covariance est: $cov(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}$ $r^2 = a.a'$		

Ecriture complexe d'une transformation plane.

Le plan complexe est muni d'un repère.

1- Transformation plane

1-1- Définition

On appelle transformation Plane, toute bijection du plan sur lui-même.

1-2- Ecriture complexe

Soit f une transformation plane du plan (P) qui associe à tout point M d'affixe z un point M'd'affixe z'.

L'expression de z' en fonction de z est appelée écriture complexe de la transformation f. Soit

$z' = \varphi(z)$

1-3- Transformations élémentaires du plan

1-3-1-Translations

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'ensemble des vecteurs du plan.

On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ notée $t_{\vec{u}}$, l'application qui, à tout point M du plan associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

M, M' et $\vec{u}$ étant d'affixes respectives z, z' et b, on a :

$M' = t_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow z' - z = b$

D'où :

Propriété :

- La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b a pour écriture complexe : $z' = z + b$
- Réciproquement, toute application du plan dans le plan complexe d'écriture $z' = z + b$ est la translation de vecteur d'affixe b.

1-3-2- Homothéties

Définition

Soit Ω un point du plan et k un nombre réel non nul.

On appelle homothétie h de centre Ω et de rapport k ,l'application qui, à tout point M du plan associe le point M' tel que : $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$

M, M' et Ω étant d'affixes respectives z, z' et ω, on a :

$M' = h(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega)$

D'où :

Propriété :

- L'homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport k a pour écriture complexe : $z' = kz + (1 - k)\omega$
- Réciproquement, toute application du plan dans le plan d'écriture $z' = az + b$,avec
- $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$ est l'homothétie de rapport le réel a et de centre le point Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$ (car $\omega = a\omega + b$).

1-3-3-Rotations

Définition

Soit Ω un point du plan et θ un nombre réel.

On appelle rotation r de centre Ω et d'angle θ,l'application qui, à tout point M du plan associe le point M' tel que : $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta\ [2\pi] \end{cases}$

M, M' et Ω étant d'affixes respectives z, z' et ω, on a :

- $\theta = (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right)\ [2\pi]$;
- $\left|\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = \frac{\Omega M'}{\Omega M} = 1.$

Ainsi

$M' = r(M) \Leftrightarrow \Omega M' = e^{i\theta}\Omega M \Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

D'où :

Propriété :

- La rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ a pour écriture complexe :
  $z' = e^{i\theta}z + (1 - e^{i\theta})\omega$
- Réciproquement, toute application du plan dans le plan d'écriture
  $z' = az + b, \begin{cases} a \in \mathbb{C}^* - \{1\} \\ |a| = 1 \\ b \in \mathbb{C} \end{cases}$ est la rotation d'angle $\theta = \arg(a)$ et de centre le point Ω d'affixe
  $\omega = \frac{b}{1-a}$ (car $\omega = a\omega + b$).

Remarque

Le centre Ω de l'homothétie h(ou de la rotation r) est l'unique point invariant par l'homothétie $h(h(\Omega) = \Omega)$ ou par la rotation $r(r(\Omega) = \Omega)$

Similitude plane directe.

1- Similitudes planes

On appelle similitude plane de rapport $k(k > 0)$toute transformation du plan telle que pour tous points M et N d'images respectives M' et N' on a : $M'N' = k\,MN$.

2- Similitudes planes directes

a) Définition

On appelle similitude plane directe toute similitude plane qui conserve l'orientation des angles

b) Propriété

Toute similitude plane directe, a une écriture complexe est de la forme $z' = az + b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Le réel strictement positif $k = |a|$ est appelé rapport de similitude.

Propriété fondamentale :

- Toute similitude plane directe de rapport $k (k > 0)$ est :
  - Soit une translation ;
  - Soit une homothétie de rapport k ;
  - Soit une rotation ;
  - Soit la composée d'une rotation et d'une homothétie de rapport k ;
- Soit f une similitude plane d'écriture complexe $z' = az + b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. On a :

  Premier cas : a $\in \mathbb{R}^*$
  - Si $a = 1$: alors f est la translation dont le vecteur a pour affixe b. si de plus $b = 0$, alors f est l'application identique du plan ;
  - Si $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$: alors f est homothétie de rapport $k = a$ et de centre le point d'affixe $\frac{b}{1-a}$; c'est l'unique point invariant par f.

  Second cas : a $\in \mathbb{C}^* - \{1\}$
  - Si $|a| = 1$ alors f est la rotation d'angle $\theta = \arg(a)$ et de centre d'affixe $\frac{b}{1-a}$;
  - Si $|a| \neq 1$ alors f la composée commutative de la rotation de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et d'angle $\theta = \arg(a)$ et de l'homothétie de même centre Ω et de rapport $k = |a|$
  - On dit aussi que f est la similitude plane directe de rapport $k = |a|$, d'angle $\theta = \arg(a)$ et centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$.

Propriété :

- Toute similitude plane directe de rapport $k (k > 0)$ multiplie :
  - Les distances par k ;
  - Les aires par k^2 ;
- Toute similitude plane directe de rapport k conserve :
  - L'orientation des angles ;
  - L'alignement des points ;
  - Le barycentre ;
- Toute similitude plane directe de rapport k transforme :
  - Une droite en une droite ;
  - Un cercle C de rayon R en un cercle C'' de rayon kR; le centre de C' étant l'image du centre de C par la similitude.