

Épreuve de Mathématiques

Évaluation mensuelle de septembre

L'épreuve comporte 5 exercices, tous obligatoires. La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements seront prises en compte par le correcteur.

PARTIE A : Évaluation des ressources (15 points)

Exercice 1 : 3,5 points

I. On considère le polynôme complexe P de degré 3 défini par :

$$P(z) = z^3 - (2 + 2i)z^2 + 2(1 + 2i)z - 4i.$$

1. Montrer que $P(2i) = 0$. 0,5 pt

2. a. Déterminer les nombres complexes a et b tels que :

$$P(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b). \quad \text{0,5 pt}$$

b. Résoudre l'équation $P(z) = 0$. 0,75 pt

3. Soient $z_A = 1 + i$ et $z_M = x + iy$ avec x et y des nombres réels.

Soit (C) l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que : $|z_M - z_A| = 4$.

a. Montrer que le point $B(-3, 1)$ appartient à (C) . 0,25 pt

b. Déterminer, puis représenter l'ensemble (C) . 0,5 pt

II. Dans le plan complexe, on donne les points $A(2; -5)$, $B(2; 3)$ et $C(8; -1)$.

1. Donner la forme algébrique de $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}$. 0,5 pt

2. En déduire la nature exacte du triangle ABC . 0,5 pt

Exercice 2 :

Déterminer les solutions des équations suivantes

a) $z^2 + iz + 5 - 5i = 0$ 1pt

b) $(z - i)^2 + i(z - i) + 5 - 5i = 0$ 1pt

c) $z^2 + 1 = 0$ 1pt

Exercice 3 3,5pts

3. Soient $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$

a) Déterminer le module et l'argument de z_1 et z_2 1pt

b) Ecrire sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique le produit $z_1 z_2$ 1,5pt

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$ 1pt

Exercice 4: 4 points

Soient $A(-1, 1, 2)$, $B(1, 1, -2)$ et $C(1, 2, 3)$.

1-Vérifier que les points $A, B,$ et C ne sont pas alignés 0,5 pt

2-Déterminer une équation du plan (P) passant par $A, B,$ et C . 1pt

3- Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z + 2 = 0$$

a) Montre que S est une sphère dont tu précisera le centre et le rayon 1pt

b) Déterminer l'intersection de la sphère avec le plan $(0, \vec{i}, \vec{j})$ 1,5pt

PARTIE B : Évaluation des compétences (5 points)

Emmanuel possède trois terrains dont il veut absolument clôturer car il lui est rapporté que des personnes males intentionnés utilisent ces espaces à des fins douteuses. Emmanuel décide donc d'utiliser le fils barbelé à 3500FCFA le rouleau de 5m.

< Le 1^{er} terrain est formé de tous les point $M(x, y)$ du plan solution de l'équation

$$\operatorname{Re}(Z')=0 \text{ ou } Z' = \frac{z-4-6i}{z-2i} \quad z = x + iy$$

<Le 2^{em} terrain quant à lui est formé de tout les $M(x,y)$ du plan vérifiant $|z - 3 - i| = 5$ ou $z = x + iy$

<Le 3^{em} terrain a la forme d'un rectangle dont les dimensions sont les parties réelles et imaginaires de la solution à l'équation $(1 + 4i)z + (3 - 4i)z = 4 - 8i$ ou $z = x + iy$

Taches

- 1 Déterminer le montant à dépenser par Emmanuel pour l'achat du fil barbelé devant permettre de clôturer le 1^{er} terrain **1,5pt**
- 2 Déterminer le montant à dépenser par Emmanuel pour l'achat du fil barbelé devant permettre de clôturer le 2^{em} terrain **1,5pt**
- 3 Déterminer le montant à dépenser par Emmanuel pour l'achat du fil barbelé devant permettre de clôturer le 3^{em} terrain **1,5pt**

Présentation 1,5pt