MINESEC
LYCEE BILINGUE DE YAOUNDE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
EVALUATION DE LA TROISIEME SEQUENCE

ANNEE SCOLAIRE :2018/2019
NIVEAU :TC
COEF :5
DUREE :4H

PARTIE A/ Evaluation de ressources : 15,5pts

EXERCICE 1 : Arithmétique 5,5pts

I)Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 5. On considère les entiers $a = n^3 - n^2 - 12n$ et $b = 2n^2 - 7n - 4$ et $d = pgcd(a;b)$

1) a) Montrer que a et b sont tous deux multiples de $n-4$. 0,5pt
   b) Exprimer $pgcd(a;b)$ en fonction de $n-4$. 0,25pt
2) On pose $\alpha = 2n+1$ et $\beta = n+3$.
   a) Montrer que tout diviseur commun à α et β est un diviseur de 5. 0,25pt
   b) Montrer que $2n+1$ *et* n sont premiers entre eux. 0,25pt
3) Déterminer suivant les valeurs de n et en fonction de $pgcd(a;b)$. 0,75pt

II) On considère l'équation $36x - 25y = 6$ (E)
1) Montrer que pour toute solution $(a;b)$ de cette équation, b est un multiple de 6. 0,5pt
2) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ cette équation. 0,75pt
3) Soit d le plus grand diviseur commun de a *et* b lorsque $(a;b)$ est solution de l'équation (E).
   a) Quelle sont les valeurs possibles de d ? 0,5pt
   b) Quelles sont les solutions pour lesquelles a *et* b ne sont pas premiers entre eux ? 0,5pt

III) On pose $u = 2+\sqrt{3}$ et $v = 2-\sqrt{3}$
1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on peut écrire : $u^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ et $v^n = a_n - b_n\sqrt{3}$ où a_n *et* b_n sont des entiers naturels. 0,5pt
2) Exprimer $a_{n+1} + b_{n+1}$ en fonction de a_n *et* b_n. 0,5pt
3) Etablir que : $a_n{}^2 - 3b_n{}^2 = 1$ *et que* $a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n = 1$. 0,5pt
4) En déduire que les fractions $\frac{a_n}{b_n}$; $\frac{a_{n+1}}{a_n}$; $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ sont irréductibles. 0,5pt

EXERCICE 2 Etude d'une fonction irrationnelle 4pts

I) Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}$ et (C_f) sa représentation graphique.
1) Déterminer l'ensemble de définition de f puis écrire f sans symbole valeur absolue. 0,5pt
2) Etudier la dérivabilité de f en 1 et 5 puis donner une interprétation graphique du résultat. 0,5pt
3) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation. 1pt
4) Démontrer que les droites d'équations $y = x - 3$ et $y = -x + 3$ sont asymptote à (C_f). 0,5pt
5) Tracer et montrer qu'elle admet un axe de symétrie dont on précisera l'équation. 0,75pt
6) Démontrer que pour tout nombre réel $x$de l'intervalle [1 ; 5], le point M$(x;y)$ est à une distance constant(C_f) e du point A(3 ; 1). 0,5pt
7) En déduire la nature de (C_f) sur l'intervalle [1 ;5]. 0,5pt

EXERCICE 3 : Inégalité des accroissements finis et application aux suites numériques : 2,5pts

Soit f la fonction définie sur J = [0 ; 1] par : $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$

1) Résoudre dans J l'équation $f(x) = x$ 0,25pt
2) Montrer pour tout $x \in J, f(x) \in J$ et que pour tout $x \in J, 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$ 0,25pt
3) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in [0;1]$ *et pour tout entier naturel* $n, u_{n+1} = f(u_n)$
   a)Démontrer par récurrence que $\forall n \in N, u_n \in J$. 0,5pt
   b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - 1|$. 0,5pt
   c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $|u_n - 1| \leq (\frac{1}{\dots})^n$

XERCICE 4 : Produit vectoriel, et espace vectoriel. 4pts

L'espace (ε) est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et W est l'ensemble des vecteurs de (ε). On considère les points A(3 ; -2 ; 2) , B(6 ;1 ;5), C(6 ; -2 ; - 1). On considère l'endomorphisme φ de W qui, à tout vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, associe $\varphi(\vec{u}) = (2x + 2y)\vec{i} - (x + y\vec{j} + z\vec{k}$

Donner une équation cartésienne du plan (ABC). 0,5pt

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que : $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$. 0,5pt

Donner une représentation paramétrique de la droite (AC). 0,5pt

Déterminer la matrice de l'endomorphisme φ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. 0,5pt

Déterminer le noyau du $Ker\varphi$ et l'image $Im\varphi$ de l'endomorphisme. on donnera une base de chacun. 0,5pt

On pose $\overrightarrow{e_1} = \vec{i} - \vec{j}$ et $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{2i} - \vec{j}$

Montrer que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \vec{k})$ est une base de W. 0,5pt

Déterminer la matrice de φ dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \vec{k})$. 0,5pt

Déterminer la matrice $\varphi O \varphi$, puis donner la nature et les éléments caractéristiques de φ. 1pt

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES 4,5pts

Développer un raisonnement logique et communiquer à l'aide du langage mathématiques en faisant appel au PGCD, PPCM, théorème des restes chinois, et des nombres complexes pour résoudre un problème.

Deux municipalités A et B ont au total 6192 habitants. A fin d'accomplir l'une de leurs promesses de la campagne électorale, les maires de ces deux communes reçoivent des ordinateurs qu'ils doivent partager équitablement à la population. Pour que le partage puisse bien se passer, il a fallu prévoir au moins 18 060 ordinateurs.

On a observé dans la municipalité A, au jour J_0, un phénomène naturel qui apparait périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard (J_0 +6), on observe un autre phénomène naturel dans la municipalité B dont la période d'apparition est de 81jours. On désigne par J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux phénomènes dans ces deux municipalités et par u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1.

Pour mieux comprendre ces phénomènes, un comité scientifique a été créé afin de déterminer la zone située à la frontière de deux communes qui sera plus touchée pendant la prochaine apparition simultanée de ces phénomènes. On muni le plan complexe du repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ et on définit l'application f qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z-4-2i}{z+2+i}$. Soit $A(4 + 2i)$ un point de la munipalité A et $B(-2 - i)$ un point de la municipalité B . Les points les plus impactés seront tels que z' soit imaginaire pur.

TACHES

1) Déterminer le nombre d'habitants de chaque municipalité sachant que la municipalité A a au moins 3000 habitants et la municipalité B a au mois 2500 habitants. 1,5pt
2) Déterminer le couple (u ; v) et en déduire le nombre de jours qui s'écouleront entre J_0 et J_1. 1,5pt
3) Déterminer l'ensemble des points M situé à la frontière de ces deux municipalités qui subiront plus d'impact à la prochaine apparition simultanée des deux phénomènes. 1,5pt

BONNE CHANCE