

DEVOIR N°1 DE MATHEMATIQUES / 1^{er} TRIMESTRE

EXERCICE 1 (3,5pts)

1) Soit un z nombre complexe donné.

Déterminer $E_1 = \{M(z)/(iz - 1)(\bar{z} - 1) \text{ soit un réel}\}$ (1,5pts)

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $(1 - i)z^2 + (3i + 2)z + 1 + 4i = 0$.

En déduire dans les solutions de l'équation (F): $(1 + i)z^2 + (2 - 3i)z + 1 - 4i = 0$. (2pts)

EXERCICE 2 (3,5pts)

1) On considère deux nombres complexes z_1 et z_2 donnés sous forme algébrique tels que

$z_1 = 2 + 2i$ et $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$; déterminer le module et un argument de z_1 et z_2 . (1,5pts)

2) Dans le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on note A le point d'affixe z_1 et B le point d'affixe z_2 .

a) La rotation r de centre O et d'angle $\frac{5\pi}{6}$ radian transforme le point A en un point C.

Montrer que l'affixe du point C est donné par $z_3 = -(1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i$ (0,5pts)

b) Montrer que le quotient $\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}$ est un imaginaire pur. (0,5pts)

Calculer le module et un argument de ce quotient (0,5pts)

Interpréter géométriquement ces résultats en indiquant les particularités du triangle ABC. (0,5pts)

EXERCICE 3 (4pts)

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2 + 4i = |z|^2 - 2$ (1pts)

On désigne par z_1 et z_2 les solutions de cette équation telles que $\operatorname{Re}(z_1) < 0$.

2) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $\bar{z}^2 - 4(1 - 2i)\bar{z} - 15 - 20i = 0$. (1pts)

On désigne par z_3 et z_4 les solutions de cette équation telles que $\operatorname{Im}(z_3) < \operatorname{Im}(z_4)$.

3) Calculer le quotient $\frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_1}$ (0,5pts)

4) Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

Placer les points M_1 , M_2 , M_3 et M_4 d'affixes respectives z_1 , z_2 , z_3 et z_4 . (1pts)

Quelle est la nature du quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$? (0,5pts)

EXERCICE 4 (4pts)

$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes et $\mathcal{P}$ le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1) Calculer $(\sqrt{3} - i)^2$ (0,25pts)

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (\sqrt{3} + 3i)z - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$. On écrira les solutions sous forme algébrique et sous forme trigonométrique. (1,5pts)

3) On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = \sqrt{3} + i$; $z_B = 2i$ et $z_C = -2 + 2i$.

a) Déterminer la nature du triangle OAB. (0,75pts)

b) $\mathcal{F}$ est l'application du plan qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' telle que :

$Z' = e^{-i\frac{\pi}{3}} Z$; vérifier que $\mathcal{F}(B) = A$ (0,5pts)

c) Écrire sous forme algébrique et sous forme trigonométrique l'affixe du point C' l'image du point C par $\mathcal{F}$. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$. (0,5pts) + (0,5pts)

EXERCICE 5 (5pts)

1) On considère le polynôme P défini pour tout Z de l'ensemble $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$

a) Soit $Z_0 \in \mathbb{C}$; montrer que si $P(Z_0) = 0$ alors $P(\overline{Z_0}) = 0$ où $\overline{Z_0}$ est le conjugué de Z_0 . (0,25pts)

b) Calculer $P(1 + i\sqrt{3})$, puis factoriser $P(z)$ (0,75pts)

c) Déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$. (1pts)

2) Soit A, B et C les points d'affixes respectives $a = 4$, $b = 1 + i\sqrt{3}$ et $C = \bar{b}$ où $\bar{b}$ est le conjugué de b.

a) Placer les points A, B et C sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.

(unité graphique 2cm) (0,75pts)

b) Quelle est la nature exacte du triangle ABC ? (0,75pts)

3) Soit K le point d'affixe $Z_K = -\sqrt{3} + i$, le point F image de K par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et

G l'image de K translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.

a) Déterminer les affixes respectives de F et G noté Z_F et Z_G (1pts)

b) Montrer que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires (0,5pts)

«Ce n'est pas parce que les mathématiques sont difficiles qu'on n'ose pas les faire, c'est parce qu'on n'ose pas les faire que c'est difficiles»