COLLEGE BILINGUE L'ORCHIDEE
MAKEPE SAINT TROPEZ, TEL : 33 47 49 65
Année scolaire 2021/2022

ORCHIDEE BILINGUAL COLLEGE
MAKEPE SAINT TROPEZ, TEL : 33 47 49 65
Academic year 2021/2022

Département de Mathématiques		Classe : T^le C
Composition de fin du 1^er trimestre		Epreuve de Mathématiques
Novembre 2021	Durée : 4h	Cœff. : 7

EVALUATION DES RESSOURCES : 15,5 Points

Exercice 1 3,5 points

On considère les suites (U_n) *et* (V_n) définies par : $\begin{cases} U_0 = 0; U_1 = 1 \\ U_{n+2} = 3U_{n+1} - 2U_n \end{cases}$ et $V_n = U_n + a$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = 2U_n + 1$. **0,75pt**

2. a) Déterminer a pour que (V_n) soit une suite géométrique dont précisera la raison. **0,5pt**
b) Donner l'expression de (U_n) en fonction de n. **0,5pt**

3. Démontrer que deux termes consécutifs de la suite (U_n) sont premiers entre eux. **0,5pt**

4. On dit qu'un entier naturel T est parfait lorsque la somme de ses diviseurs positifs est égale $2T$. p est un nombre premier supérieur à 2, n est un entier naturel. On note $\alpha = 2^n p$.

a) Prouver que la somme de tous les diviseurs positifs de α est $(1+p)\left(2^{n-1}-1\right)$. **0,5pt**

b) Déduisez-en que si α est parfait alors $p = U_{n+1}$. **0,5pt**

c) Déterminer la valeur de p pour laquelle $2^4 p$ est un nombre parfait. **0,25pt**

Exercice 2 4 points

1. Démontrer par récurrence que Pour tout entier naturel $n \geq 1$:

a) $3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17 ; b) $\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k+1}\right) \geq 1+\frac{n}{2}$ **1pt**

2. On pose pour tout entier naturel $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+2+3+\cdots+k}$

3. a) Calculer S_1 et S_2. **0,5pt**

b) Démontrer en raisonnant par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$. **0,75pt**

4. $\alpha \in [0;\pi]$ et z un nombre complexe. On pose : $p(z) = z^3 - (1-2\sin\alpha)z^2 + (1-2\sin\alpha)z - 1$

a) Calculer $P(1)$. **0,25pt**

b) Déterminer les nombres complexes a, b *et* c tels pour tout nombre complexe z,
$P(z) = (z-1)\left(az^2+bz+c\right)$ **0,75pt**

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. **0,75pt**

Exercice 3 3,5 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on donne les points C, D et E de coordonnés respectives

$A(2;0;1)$, $B(3;-2;0)$ *et* $C(2;8;-4)$. On considère dans $\mathbb{R}^3$ le système $(S)\begin{cases} -x+y-2z=-4 \\ -x-y-z=-11 \\ 2x+y-z=8 \end{cases}$

1. Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace. Exprimer en fonction de x, y *et* z les coordonnées de $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM}$. **0,75pt**

sujetexa.com

2. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (S). **0,75pt**

3. Montrer qu'il existe un unique point N de l'espace vérifiant $\overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN}$ et donner les coordonnées du point N. **0,5pt**

4. a) Montrer que le volume V du tétraèdre $ABCN$ est égal à $\frac{1}{6}CN^2$ puis calculer V. **0,75pt**

b) Calculer l'aire du triangle ABC (on pourra utiliser le résultat de la question 1) puis en déduire la distance du point N au plan (ABC). **0,75pt**

Exercice 4 **4,5 points**

Soit la fonction f définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\sqrt{\tan x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter le résultat. **0,75pt**

2. Monter que f réalise une bijection de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0;+\infty[$. **0,5pt**

3. Tracer les courbes (C) de f et (C^{-1}) de f^{-1} dans le même repère. **1pt**

4. On pose $g=f^{-1}$. Montrer que g est dérivable sur $[0;+\infty[$ et que $g'(x)=\frac{2x}{x^4+1}$ $\forall x\in[0;+\infty[$. **0,75pt**

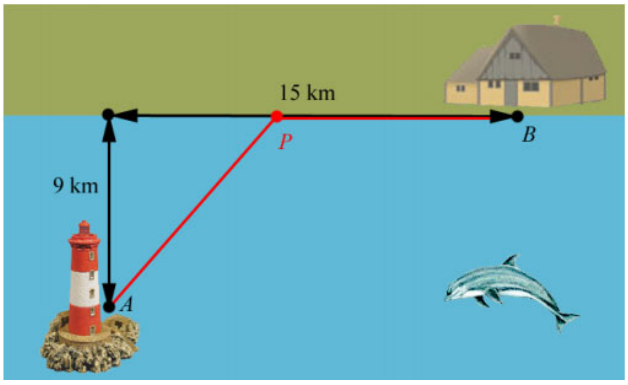
5. a) Montrer que $\forall x\in[0;+\infty[;\ g(x)+g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$ **0,5pt**

b) En déduire que $g\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+g\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)$ est une constante à déterminer. **0,25pt**

6. Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{1}{n+k}\right)$.

Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ g\left(\frac{1}{2n}\right)\le u_n\le g\left(\frac{1}{n}\right)$ puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. **0,75pt**

EVALUATION DES COMPETENCES **4,5 Points**



ELOUME est gardien d'un phare (point A). Il cherche le meilleur trajet qui lui permettra de rejoindre le plus rapidement possible sa maison côtière (point B). Il se déplace en canot à la vitesse de 4 km/h et à pied à la vitesse de 5 km/h. Il voudrait savoir où accoster (point P) pour que son temps de parcours soit minimal. La côte est supposée rectiligne. Lors d'une sortie avec ses amis, il soumet son problème à ces derniers ; l'un d'eux, EKOBE a posé $PB = x$ (x en km) et après un temps de recherche, il affirme que le problème de ELOUME revient à trouver le minimum sur $[0;15]$, de la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{4}\sqrt{x^2-30x+306}+\frac{1}{5}x$, mais ayant oublié ses notions de maths, il ne sait plus comment continuer.

Au cours de cette sortie avec ses ais, ELOUME a fait une commande de bières et de jus en bouteilles. Une bouteille de bière coûte 350 F CFA et une bouteille de jus coûte 200 F CFA ; ELOUME ne consomme que de la bière et chacun de ses amis n'a droit qu'à une seule bouteille. Après consommation, Il reçoit alors une facture de 10 000 $F\ CFA$.

1. Aidez ELOUME qui est dubitatif sur l'affirmation de EKOBE en lui prouvant que ce dernier a raison.

2. Achevez le travail d'EKOBE en déterminant la position exacte du point P où ELOUME doit accoster.

3. Déterminer le nombre de bouteilles de bière et de bouteilles de jus qu'ils ont pu consommer sachant que ELOUME avait pour soucis de satisfaire le plus grand nombre possible de ses coéquipiers.

sujetexa.com