E-Learning
Tel : 695958181
Département de mathématiques

TRAVAUX DIRIGES :Suites numériques

Année Scolaire : 2021-2022
Classe :Tle D.

Proposés par : M.Tchepanou Achille Boris.

EXERCICE 1 : Démontrer par récurrence que :

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2^n > n$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{k=n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$.

c) $\forall n \in \mathbb{N},\ 10^n - 1$ est divisible par 9.

d) $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \frac{3n}{2n+1}$.

e) $\forall n \in N^* \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$

EXERCICE 2 :

1-Ecrire chacune des sommes ci-dessous en utilisant la notation indicielle $\sum$

$A_n = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$;

$B_n = (1)(2) + (2)(3) + \cdots + (n)(n+1)$

$V_n = \frac{1}{(1)(3)} + \frac{1}{(3)(5)} + \frac{1}{(5)(7)} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

2-Démontrez par récurrence chacune des égalités ci-dessous en utilisant les nouvelles expressions obtenues à la question 1.

a) Pour tout $n \geq 1$, $A_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

b) Pour tout $n \geq 1$ $B_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

3-Démontez par récurrence que :

Pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n-1}\left(1 + \frac{1}{k+1}\right) \geq 1 + \frac{n}{2}$

EXERCICE 3 :

On considère la suite $(V_n)_{n \in IN^*}$ définie par

$$V_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots\cdots + \frac{n}{n^2+n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}.$$

1- Calculer V_2 *et* V_3.

2- Démontrer que $\forall n \in IN^*$ $\frac{n}{n+1} \leq V_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$.

3- En déduire que la suite (V_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 4 :

Toutes les heures, on injecte à un sujet, une même dose de 1,8 unité, d'une substance médicamenteuse dans le sang. Les injections sont faites par piqûres intraveineuse. On suppose que la substance se repartit instantanément dans le sang et qu'elle est ensuite progressivement éliminée.
En l'espace d'une heure, la quantité de cette substance présente dans le sang diminue de 30%. La première injection se fait à l'instant t = 0. Pour tout entier naturel non nul n, on note U_n la quantité de substance présente dans le sang à l'instant t = n (en heure), dès que la nouvelle injection est faite.

1- a) Justifier que $U_1 = 1{,}8 + 0{,}7 \times 1{,}8$.

b) Calculer de même U_2.

2- a) Pour tout entier naturel non nul n, montrer que $U_{n+1} = 0{,}7U_n + 1{,}8$.

b) Pour tout entier naturel non nul n, on pose $V_n = U_n + \alpha$ où α est un paramètre réel.

Déterminer α pour que la suite (V_n) soit géométrique.

c) Exprimer alors V_n, puis U_n en fonction de n.

EXERCICE 5 :

Une entreprise paye en Décembre 2000 un loyer mensuel de 300 000 francs pour ses locaux. Elle doit renouveler son bail le 1er Janvier 2001 et deux contrats lui sont proposés :

1. Contrat A :
Le loyer augmente de 7% à chaque mois de Janvier, puis reste le même toute l'année.
Quelle est avec ce contrat, le loyer de Janvier 2001 ? 2002 ?
2. Contrat B :
Le loyer augment de 1% chaque mois.
On pose $U_0 = 300\ 000$, U_1 le loyer de Janvier 2001, U_2 celui de Février 2001 etc....

1-Calculer U_1, U_2 et U_3 en fonction de U_0.

2-Calculer U_{n+1} en fonction de U_n, puis en fonction de n. ($n \in N^*$)

3-Soit S_n le montant total des loyers pendant n mois à partir de Janvier 2001.c-à-d $S_n = U_1 + U_2 + \cdots\cdots + U_n$.

Calculer selon chaque contrat S_{10}, S_{12}, S_{18} et S_{24}

4-Quel est le contrat le plus avantageux ?

EXERCICE 6 :

Dire en justifiant, si chacune des assertions ci-dessous est vraie ou fausse.

1. Si (v_n) une suite géométrique strictement positive de raison q, alors la suite (u_n) définie par

$u_n = \ln v_n$ (où ln est le logarithme népérien) est une suite arithmétique de raison $\ln q$

2. Soit (Z_n) la suite des nombres complexes définie par : $Z_0 = -\sqrt{3} + i$ et pour tout entier naturel n, $Z_{n+1} = \frac{1}{4}(\sqrt{3} + i)Z_n$. Alors :

   a)La suite $(|Z_n|)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 2.

   b)La suite $(\arg(Z_n))$ est une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{6}$ et de premier terme $\frac{5\pi}{6}$

   c)Pour tout entier naturel n:
   $Z_n = \frac{2}{2^n}\left(\cos\frac{(5+n)\pi}{6} + i\sin\frac{(5+n)\pi}{6}\right)$

EXERCICE 7 :

On considère les complexes Z_n de la manière suivante :

$Z_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_{n+1} = \frac{1}{3}Z_n + \frac{2}{3}i$.

1- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|Z_n| < 1$.

2- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $U_n = Z_n - i$.

a) Démontrer que $(U_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \dfrac{1-i}{3^n}$.

EXERCICE 8 :

A-Pour tout entier naturel n, on pose :

$$S_n = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^n}$$

1-Exprimer S_n en fonction de n.

2-Calculer la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

B- (U_n) est la suite numérique définie sur N^* par :

$U_1 = 0,4$; $U_2 = 0,44$; $U_3 = 0,444$;…… ;et pour tout $n \in N^*$, $U_n = 0,44\cdots4$ (n chiffre 4).

1-a) Prouver que : $U_{n+1} = \dfrac{1}{10}U_n + U_1$.

b) En déduire par récurrence que :

$$U_n = U_1 + \frac{1}{10}U_1 + \frac{1}{100}U_1 + \cdots + \frac{1}{10^n}U_1$$

EXERCICE 9 : *D'après Bacc.D 2006.*

Soit la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 7 \\ 5U_{n+1} - 2U_n = 6 \end{cases}$

1-Calculer les termes U_1 et U_2.

2-Soit (V_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $V_n = U_n - 2$.

Montre que (V_n) est une suite géométrique.

3-a) Exprimer V_n, puis U_n en fonction de n.

b) Exprimer $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ en fonction de n.

4-Calculer les limites respectives de U_n et S_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 10 : Soit *f* la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$.

1- a) Etudier les variations de *f*.

b)Montrer que l'équation *f*(x) = 0 admet dans $]1;+\infty[$ une solution unique α telle que $\alpha \in]1,1;1,2[$.

2-*g* est al fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{1+e^{-x}}$

Montrer que l'équation *f*(x) = 0 équivaut à l'équation g(x) = x.

3- n désigne par I l'intervalle $]1;2[$.

Montrer que pour tout $x \in I,\ g(x) \in I$ et $0 \leq |g'(x)| \leq \dfrac{1}{2e} \leq \dfrac{1}{5}$.

4-On définit sur IN la suite (U_n) par : $U_0 = 1,1$ et pour $n \geq 0,\ U_{n+1} = g(U_n)$.

a) Montrer que pour tout n de IN, $U_n \in I$.

b) Montrer par récurrence et en utilisant l'inégalité des accroissements finis, que pour tout n de IN, $|U_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}$.

c) En déduire que cette suite converge et préciser sa limite.

d) Déterminer le plus petit des entiers p pour lesquels U_p est une valeur approchée de α à 10^{-4} près.

EXERCICE 11:

On considère la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x) = x - 1 - 2\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$. (C) désigne sa représentation graphique de f dans un repère orthogonal d'unité graphique 2cm.

Partie A

1) Dresser le tableau de variations de f

2) Montrer que $(D): y = x - 1$ est asymptote à (C). Préciser la position de (C) par rapport à (D).

3) Construire (C) et (D) dans le même repère.

4) Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2,+\infty[$.

5) Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Partie B

On considère la suite (U_n) définie par :

$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$ où n est un entier naturel.

1) Résoudre dans l'intervalle $[1,+\infty[$ l'équation $f(x)=x$. On désigne par x_0 la solution de cette équation.
2) Montrer que pour tout x de l'intervalle $[2,3]$, $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$
3) Montrer que pour tout x de l'intervalle $[2,3]$, $f(x)$ appartient à l'intervalle $[2,3]$
4) En déduire par récurrence que $U_n \in [2,3]$
5) Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour démontrer que $\forall n \in IN, |U_{n+1}-x_0| \leq \frac{2}{3}|U_n - x_0|$
6) Déduire que $\forall n \in IN, |U_n - x_0| \leq (\frac{2}{3})^n |U_0 - x_0|$
7) Montrer que (U_n) est convergente, (on précisera la limite de (U_n))

EXERCICE 12:

U_1 et a sont deux réels données. Soit $\left(U_n\right)_{n\in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + a$.

1- Montrer qu'il existe un nombre réel b tel que si l'on pose : $\forall n\in \mathbb{N}^*, V_n = U_n - b$,

La suite $\left(V_n\right)_{n\in \mathbb{N}^*}$ soit une suite géométrique.

2- Calculer $S_n = V_1 + V_2 + \cdots\cdots\cdots + V_n$ et en déduire $S'_n = U_1 + U_2 + \cdots\cdots\cdots + U_n$ en fonction de U_1, a et n.

EXERCICE 13: *D'après Bacc.D 2012.*

On considère la suite U à termes positifs définies sur N^* par : $U_{n+1} = 2\sqrt{U_n}$ et $U_1 = 1$.

1-Calculer U_2 et U_3.Donner les résultats sous la forme 2^{λ}, où λ est un réel.

2-Soit (V_n) la suite définie par $V_n = \ln U_n - 2\ln 2$.

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique.

b) Exprimer V_n en fonction de n.

c) En déduire l'expression de U_n en fonction de n et calculer la limite de U_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 14:

Soit (U_n) la suite définie par $U_o \in \,]0\,;1[$ et pour tout $n \in$ IN, $U_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+U_n}{2}}$

1- Démontrer que pour tout $n \in$ IN, $0 < U_n < 1$.
2- Montrer que la suite (U_n) est croissante .
3- En déduire que la suite (U_n) est convergente .

On veut déterminer la limite de la suite (U_n) par deux méthodes différentes.

1ère méthode

On pose $U_o = \cos\theta$ avec $\theta \in [0, \pi/2]$.

a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in$ IN, $U_n = \cos\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$.

b) En déduire la limite de la suite (U_n) .

2ème méthode

Soit (V_n) la suite définie par $V_n = 1 - U_n$.

a) Quel est le sens de variation de la suite (V_n) ?

b) Démontrer que pour tout $n \in$ IN, $.0 \leq V_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}V_n$

c) En déduire que pour tout $n \in$ IN, $V_n \leq \dfrac{V_0}{2^n}$.

d) En déduire la limite de la suite (U_n) .

EXERCICE 15:

1. Soit (v_n) une suite géométrique strictement positive de premier terme v_0 et de raison q. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \ln v_n$ où ln est le logarithme népérien. Montrer que la suite (u_n) est une suite arithmétique que l'on caractérisera.

2. On suppose maintenant que (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_1. Soit q un réel non nul. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = q^{u_n}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique que l'on caractérisera.

3. On pose pour ≥ 1 , $w_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ et $t_n = w_n + \frac{1}{n.n!}$

a) Déterminer w_1 et t_1

b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n \leq t_n$

c) Montrer que (w_n) est croissante et que (t_n) est décroissante.

d) Calculer $\lim_{n\to+\infty}(t_n - w_n)$. En déduire que (w_n) et (t_n) sont convergentes et ont une limite commune ℓ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n \leq \ell \leq t_n$. (On dit que (w_n) et (t_n) sont des suites adjacentes.)

EXERCICE 16: On définit la suite (U_n) sur IN^* par $U_1 = 6,\ U_2 = 1$ et la relation de récurrence $U_{n+1} = -\dfrac{1}{6}U_n + \dfrac{1}{6}U_{n-1}$.

1- a) On définit la suite (V_n) pour $n > 1$ par : $V_{n+1} = U_{n+1} + \dfrac{1}{2}U_n$. Montrer que (V_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

b)On définit la suite (W_n) pour $n > 1$ par : $W_{n+1} = U_{n+1} - \dfrac{1}{3}U_n$. Montrer que (W_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$.

2- a) Calculer V_2, W_2 et exprimer V_{n+1} et W_{n+1} en fonction de n.

b) En déduire l'expression de U_n en fonction de n.

c) La suite (U_n) est-elle convergente ?

3- On pose pour tout n appartenant à IN^*, $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$.

a) Déterminer S_n en fonction de n.

b) Montrer que la suite (S_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 17:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$. On considère la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n + 1}{U_n} \end{cases}.$$

1- Etudier et représenter la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$.

2- Représenter sur l'axe des abscisses les premiers termes de la suite (U_n).

3- Déterminer l'abscisse α du point de concoure de la courbe de et la première bissectrice.

4- Montrer par récurrence que $\forall n \in IN$, $1 \le U_n$.

EXERCICE 18: *D'après Bacc.D 2008.*

1-Dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, tracer la courbe représentative de la fonction g définie sur **R\{-2}** par : $g(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$.

2-Soit (U_n), la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ \forall n \in N,\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 1}{U_n + 2} \end{cases}.$$

a) Représenter sur les axes des abscisses du repère précédent les termes U_1, U_2 et U_3.

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \le U_n < 2$.

d) En déduire que la suite (U_n) est convergente.

3-Soit la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par : $V_n = \dfrac{1+U_n}{2-2U_n}$.

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer V_n, puis U_n en fonction de n.

c) En déduire la limite de U_n.

4-On pose $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$. Exprimer S_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

EXERCICE 19:

On se propose d'étudier la suite (U_n) définie sur IN par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = U_n e^{-U_n}$, puis la convergence de la suite (S_n) définie par $S_n = \sum\limits_{p=0}^{n} U_p$

1-a) Montrer que pour tout entier n, $U_n > 0$

b) Montrer que la suite (U_n) est convergente puis déterminer sa limite

2-a) Montrer que pour tout entier n,

$$U_{n+1} = e^{-S_n}$$

b) En déduire la limite de S_n en $+\infty$.

EXERCICE 20:

1-n est un entier naturel donné. Résoudre dans R, l'équation : $\ln(7^n x) = 2n$.

On considère la suite numérique (V_n) définie par : $\ln(7^n V_n) = 2n$.

2-a) Calculer V_0.

b) Montrer que (V_n) est une suite géométrique. Déterminer sa raison.

c) (V_n) est-elle convergente ou divergent ?

EXERCICE 21:

Soit (U_n), la suite définie par :

$U_{n+2} - 2U_{n+1} + U_n = 0$.

1-Démontrer que (U_n) est une suite arithmétique.

2-Exprimer U_n en fonction de n, U_1 et U_0.

EXERCICE 22:

a, b et c sont dans cette ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique. Déterminer a, b et c sachant que : $\begin{cases} a \times b \times c = 1 \\ a^2 + b^2 + \dfrac{1}{c^2} = 513 \end{cases}.$

EXERCICE 23:

Au bout de combien de temps un prix est-il multiplié par 10, dans l'hypothèse d'une inflation annuelle de 3,5% ?