DIOCESE DE BAFOUSSAM
SECRETARIAT A L'EDUCATION
COLLEGE B. CATHOLIQUE St ABRAHAM
Département de mathématiques

ANNEE SCOLAIRE : 2021 /2022
EVALUATION DE FIN DU 1er TRIMESTRE
CLASSE: Tle C
DUREE: 4H COEF :7
EXAMINATEUR : M. HIONG

EPREUVE DE MATHEMATIQUES:

La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

PARTIE I/ EVALUATION DES RESSOURCES (15,5pts)

EXERCICE 1 0.5x4 pts

Pour chacune des propositions suivantes indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation

Proposition 1: $1991^{2009} \equiv 2[7]$.

a et *b* sont deux entiers relatifs quelconques, *n* et *p* sont deux entiers naturels premiers entre eux.

Proposition 2: $a \equiv b[p]$ si et seulement si $na \equiv nb[p]$.

Soit *x* un entier relatif.

Proposition 3: « $x^2+x+3 \equiv 0[5]$ si et-seulement si $x \equiv 1[5]$. »

Soit *N* un entier naturel dont l'écriture en base 10 est $\overline{aba7}$.

Proposition 4 : « Si *N* est divisible par 7 alors $a+b$ est divisible par 7. »

EXERCICE 2 (5pts)

1. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = \frac{1}{z}$ **1.5pt**

   b) b) On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives 1,$e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Démontrer que 0 est le centre de gravité du triangle ABC. **0.5pt**

2. θ est un réel de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, (E_θ) désigne l'équation
   $2(1-\cos 2\theta)z^2 - 2\sin 2\theta\, z + 1 = 0$

a) Résoudre (E_θ) dans $\mathbb{C}$ (on distinguera les $\cos\theta = 0$ et $\theta \neq 0$). **1pt**

b) Dans le cas où $\theta \neq 0$ déterminer le module des solutions z_1 et z_2 de (E_θ). z_1 étant la solution ayant une partie imaginaire positive. **1pt**

c) c) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$) on désigne par Aet B les points d'affixes z_1 et z_2, pour quelle valeur de θ.

   i) Le triangle $0AB$ est-il rectangle? **0.5pt**

   ii) ii) Le triangle $0AB$ est-il équilatéral? **0.5pt**

EXERCICE 3 (4pts)

L'espace vectoriel est muni de sa base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

d'expression analytique: $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x-y-z) \\ y' = 0 \\ x' = \frac{1}{3}(-x+y+z) \end{cases}$

1. Démontrer que $kerf$ est un plan vectoriel dont on déterminera une base. **0.5pt**
2. Démontrer que Imf est une droite vectorielle dont-on déterminera une base. **0.5pt**
3. Démontrer que $\mathbb{R}^3 = kerf \oplus Imf$. **0.75pt**

4. On pose $\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$; $\vec{v} = \vec{e}_2 - \vec{e}_3$ et $\vec{w} = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$

a) Démontrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$. **0.5pt**

b) Ecrire la matrice de f dans la base de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. **0.5pt**

5. λ étant réel, E_λ =$((x,y,z) \in \mathbb{R}^3/f$(x,y,z) = $\lambda\ (x,y,z)\}$.

a) Que représente E_0 ? **0.25pt**

b) Démontre que E_λ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. **0.5pt**

c) Dans le cas où $\lambda \neq 0$, détermine la dimension de E_λ. **0.5pt**

EXERCICE 4 : 4,5 pts

I. Soit la fonction f définie sur $]-1;1[$ par $f(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Etudier les variations de la fonction f.(on ne demande pas le tableau de variation) **0,5pt**
2. a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution β dans $]-1;1[$. **0,5pt**

   b) Donner un encadrement de β à 10^{-2} près et montrer que $\sqrt{1-\beta^2} = \frac{\beta}{1+\beta}$. **0,5pt**

   c) Déduire le signe de $f(x) - x$. **0,5pt**

II. Soit la fonction g définie sur $]-1;1[$ par $g(x) = f\left[-sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]$

1. Montrer que pour tout $x \in]-1;1[$, $g(x) = -1 - tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$. **0,25pt**
2. Montrer que g établit une bijection de $]-1;1[$ vers $\mathbb{R}$. **0,5pt**
3. Montrer que la bijection réciproque g^{-1} de g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(g^{-1})'(x) = \frac{-2}{\pi[1+(x+1)^2]}$. **0,75pt**

III. Soit la fonction f définie pour tout réel x différent de -1 par :$f(x) = \frac{1}{x+1}$. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $(f)^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$. **0,5pt**

IV. Montrer que $Q = \left(\frac{\sqrt[3]{1024}\times\sqrt{\sqrt{64}}\times\sqrt[5]{7776}}{\sqrt{18}\times\sqrt{\sqrt[3]{256}}}\right)^{\frac{1}{4}}$ est un entier. **0,5pt**

PARTIE II/ EVALUATION DES COMPETENCES (4,5pts)

Compétence visée : Lire et interpréter des informations comportant des nombres.

Le laboratoire de M. NJOYA s'intéresse à l'analyse de l'expansion d'un virus au sein d'une population dans un quartier. Dans le quartier le virus s'attaque uniquement à la population adulte qui est de 45% de cette population. Le quartier ciblé par son laboratoire a été cartographié et repéré en modèle complexe par les points ***GPS*** suivant : $A(-2+4i)$; $B(4+4i)$; $C(4+i)$ et $D(i)$ d'unité 1km. La densité de la population de ce quartier est de 500 habitants au km².

Ali, habitant de ce quartier est infecté par ce virus. M. NJOYA lui injecte un médicament par voie intraveineuse à l'hôpital et la substance est éliminée par les reins pendant à plus de 10 heures de temps. La quantité y_i (en milligrammes) présente dans le sang à l'instant x_i (en heures) a été mesurée par des prises de sang toutes les deux heures comme le montre le tableau ci-contre.

x_i	0	2	4	6	8
y_i	9,9	7,5	5,5	3,9	3

Les autorités du quartier s'intéressent aux jeunes adultes infectés. En janvier 2020, on a recensé environ 3000 infectés. A partir de janvier 2020, le nombre d'infectés confirmés augmente environ à 2,5% par mois. Les autorités ont décidé que le seuil d'alerte est atteint pour 6000 infectés déclarés depuis janvier2020.

TACHES

1) A quelle date le seuil d'alerte sera-t-il atteint ? **1.5pt**
2) Déterminer les nombres d'habitants adultes ciblés pour cette analyse. **1.5pt**
3) Quelle estimation de la quantité de médicament peut-on retrouver dans le sang pendant exactement 10 heures de temps après l'injection? **1.5pt**