La qualité de la rédaction et le soin apporté à la copie seront pris en compte.

Exercice 1 : [04,50 pts]

1. a) Démontrer que l'équation $x^3 - 4x^2 + 4 = 0$ admet trois solutions réelles [1,00 pt]

   b) Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de chacune de ces solutions [0,75 pt]

2. Soit h une fonction telle que pour tout nombres réels x et y, $|h(x) - h(y)| \leq |x - y|$. Démontrer que h est continue sur $\mathbb{R}$ [0,50 pt]

3. Soit $a; b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$; f une fonction continue sur $[a; b]$ telle que $f([a; b]) \subset [a; b]$. On veut démontrer que l'équation que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution appartenant à $[a; b]$. En posant $g : x \longmapsto f(x) - x$

   a) Montrer que la fonction g est continue suc $[a; b]$ [0,50 pt]

   b) Montrer que $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$ et en déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a; b]$ [1,00 pt]

   c) Montrer que les équations $g(x) = 0$ et $f(x) = x$ sont équivalentes et conclure. [0,75 pt]

Exercice 2 : [04,50 pts]

1. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5440 \\ pgcd(x; y) = 8 \end{cases}$ [1,50 pt]

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = 3^{2n} - 2^n$ et $B_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$

   a) Démontrer par récurrence que

      i) A_n est un multiple de 7 [0,50 pt]

      ii) B_n est un multiple de 7 [0,50 pt]

   b) En déduire que les nombres $3^{28} - 2^{14}$ et $3^{83} + 2^{43}$ ne sont pas premiers entre eux [0,50 pt]

3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $65x - 16y = 17$ [1,50 pt]

Exercice 3 : [06,00 pts] d désigne un nombre complexe dont la partie imaginaire est non nulle. Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$. L'équation $z^2 - 2dz + 1 = 0$ admet deux solutions distinctes z_1 et z_2 appartenant à $\mathbb{C}$. On considère les points $A; B; D; M_1$ et M_2 d'affixes respectives $1; -1; d; z_1$ et z_2

1. Démontrer sans calculer z_1 et z_2 que

   a) D est le milieu de $[M_1 M_2]$ [0,50 pt]

   b) $OM_1 \times OM_2 = OA^2 = OB^2$ [0,50 pt]

   c) La droite (xx') du repère $(O; \overrightarrow{u})$ est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{M_1 O M_2}$ [0,75 pt]

5

2. Démontrer que les points $A; B; M_1$ et M_2 sont cocycliques [0,75 pt]

3. a) Calculer $(z_1 - d)^2$ et $(z_2 - d)^2$ en fonction de d [1,00 pt]

b) En déduire que :

i) $DA \times DB = DM_1^2 = DM_2^2$ [0,50 pt]

ii) La droite (M_1M_2) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ADB}$ [0,75 pt]

4. Le point D étant donné, donner un programme de construction des points M_1 et M_2. (On fera une illustration) [1,25 pt]

1. On donne $U_n = 7n - 3$ et $V_n = 4n + 5$ où $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que tout diviseur commun à U_n et V_n est diviseur de 47 (0,5pt)

b) on admet que U_n et V_n ne sont pas premiers entre eux déterminer $ppcm(U_n ; V_n)$. (0,25pt)

2. a) Resoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'equation $13x - 41y + 2 = 0$ (0,75pt)

b) Resoudre dans $\mathbb{Z}$ $\begin{cases} x \equiv 3 [41] \\ x \equiv 5 [13] \end{cases}$ (0,5pt)

3. Le nombre p etant premier, et $a \in \mathbb{N}$, tel que $2 \leq a \leq p-2$. Demontrer que p ne divise pas $a^2 - 1$ (1pt)

4. a) Calculer $2^{11} - 1$. (0,25pt)

b) Demontrer que si $2^n - 1$ ($n \geq 2$) est premier, alors n est premier (1pt)

c) la reciproque est-elle vraie ? (0,25pt)

5. En base 10, on a $\overline{aaaaaa} = \overline{bbb} \times \overline{bbb} + \overline{ccc}$ determiner a, b et c (1pt)

Exercice 2

I. on donne $f(x) = \sin\frac{x}{2}$ où $x \in [\pi ; 2\pi]$

1. Etudier les variations de f et determiner l'ensemble de derivabilité de f^{-1} (on montrera que f est bijective) (1pt)

2. Montrer que $(f^{-1}(x))' = \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$ (0,5pt)

II. 1) Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{4}} \frac{1 - \tan \pi x}{\cos 2\pi x}$ $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x - 2}$ $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{E(x^2) + 1}$ (1,5pt)

2) Justifier que la fonction h definie par $h(x) = \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x - 2}$